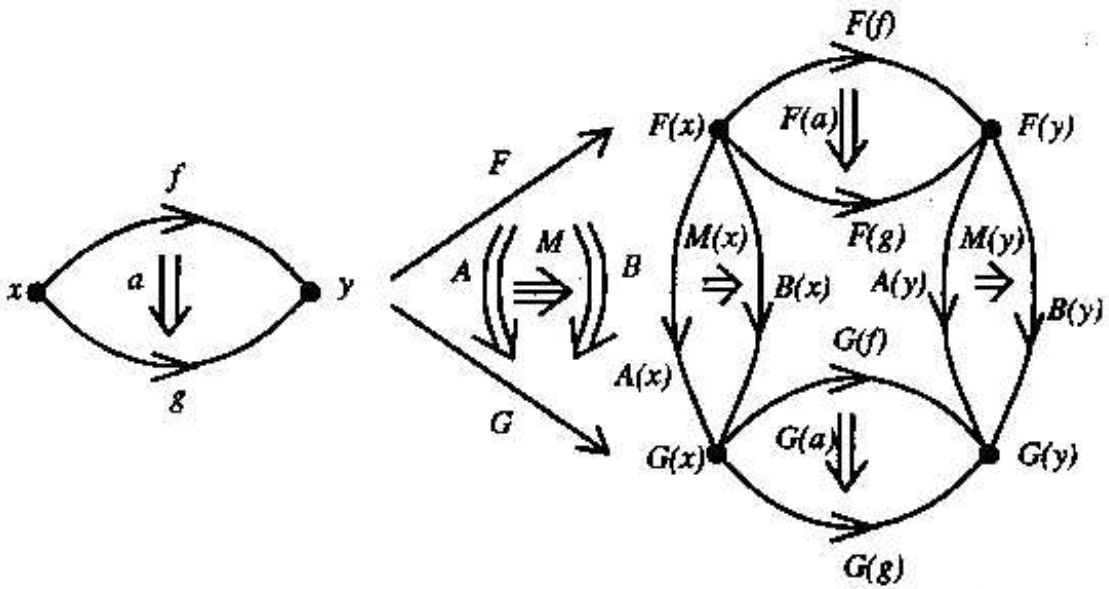
# Categorias:
# Una introducción a esta charla

Federico Font

FIQ - IMAL

16-06-2017



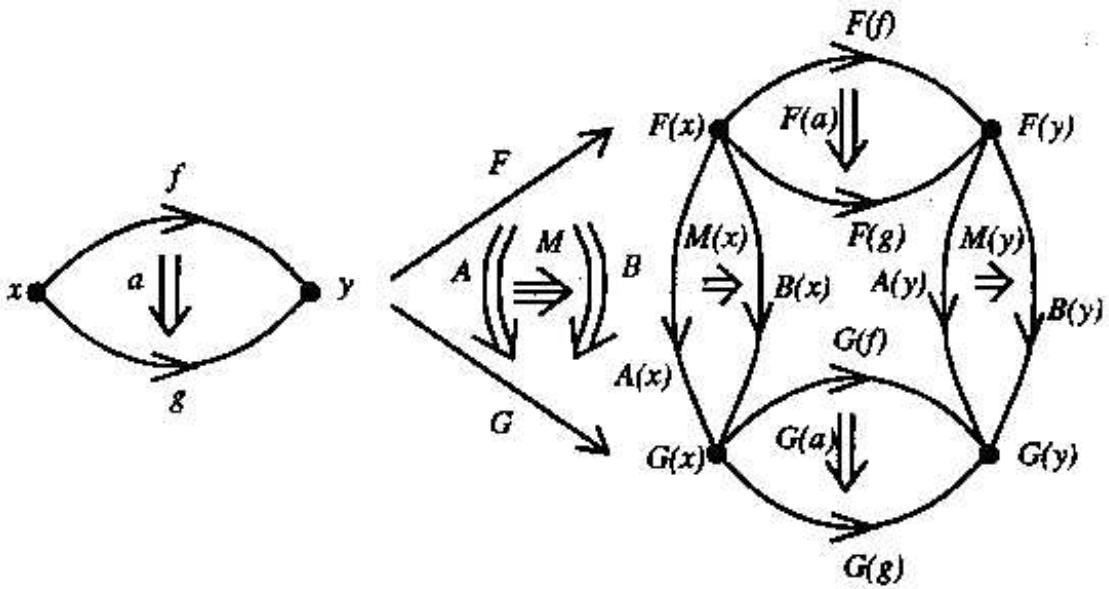
¡¡¡GRACIAS!!!

# Categorias:
# Una introducción a esta charla

Federico Font

FIQ - IMAL

16-06-2017



# Contenidos

1. Categorías
   - Definición
   - Construcciones
   - Funtores y transformaciones naturales
   - Equivalencias (y dualidades)

# Contenidos


1. Categorías
   - Definición
   - Construcciones
   - Funtores y transformaciones naturales
   - Equivalencias (y dualidades)

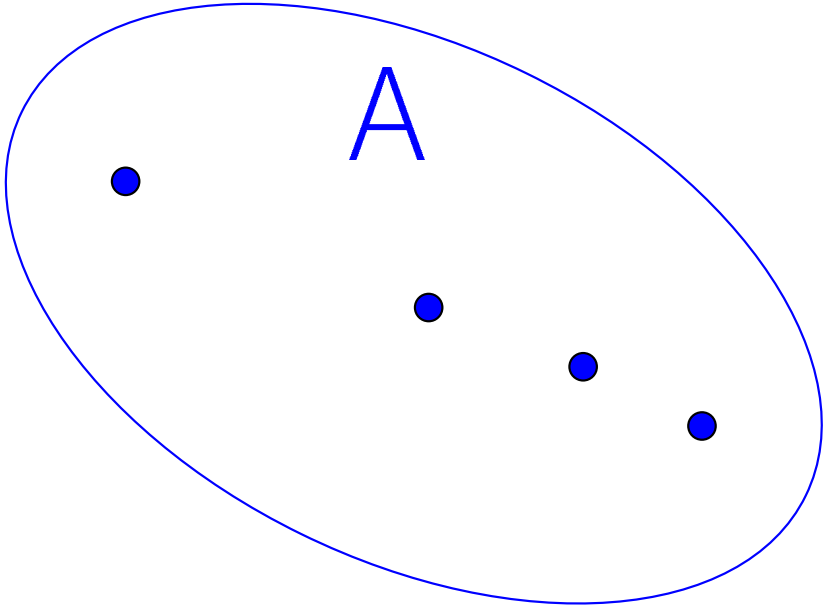
2. Decategorificación y los números naturales
   - Intuición
   - Decategorificación de $\mathbf{FinSet}$

# Contenidos

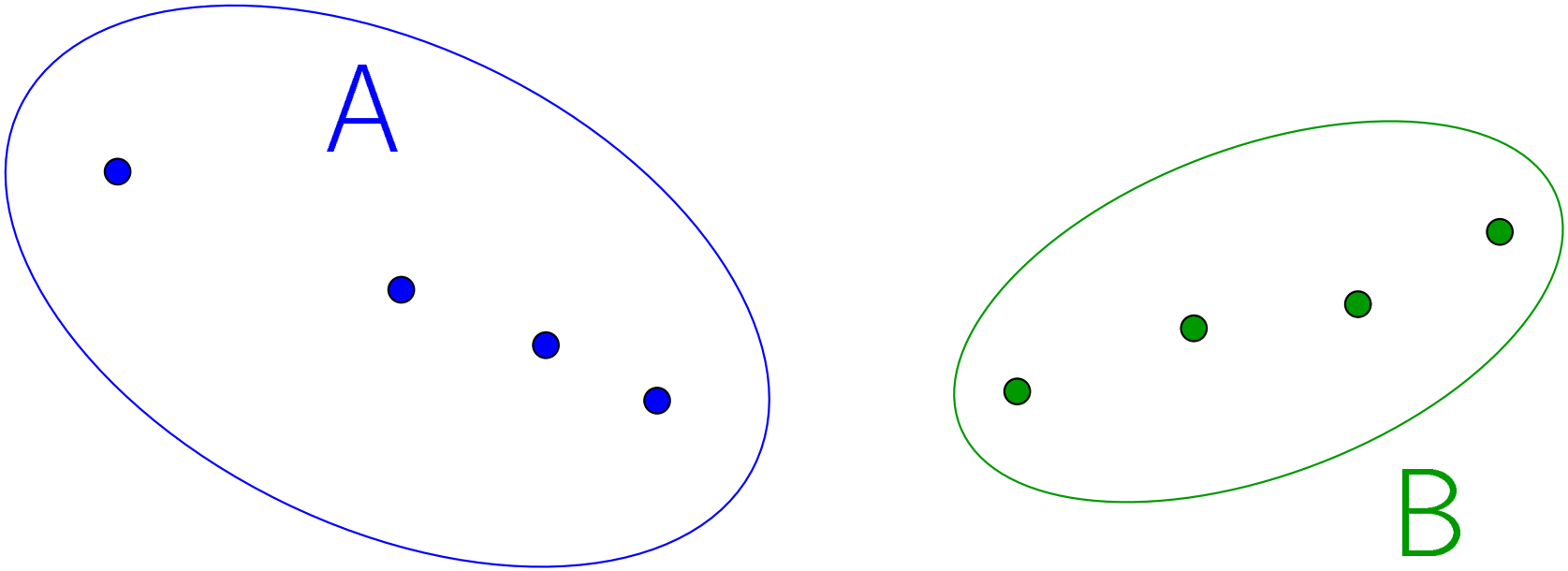

1. Categorías
   - Definición
   - Construcciones
   - Funtores y transformaciones naturales
   - Equivalencias (y dualidades)
2. Decategorificación y los números naturales
   - Intuición
   - Decategorificación de $\mathbf{FinSet}$
3. Bibliografía

1. Categorías
   - Definición
   - Construcciones
   - Funtores y transformaciones naturales
   - Equivalencias (y dualidades)
2. Decategorificación y los números naturales
   - Intuición
   - Decategorificación de $\mathbf{FinSet}$
3. Bibliografía

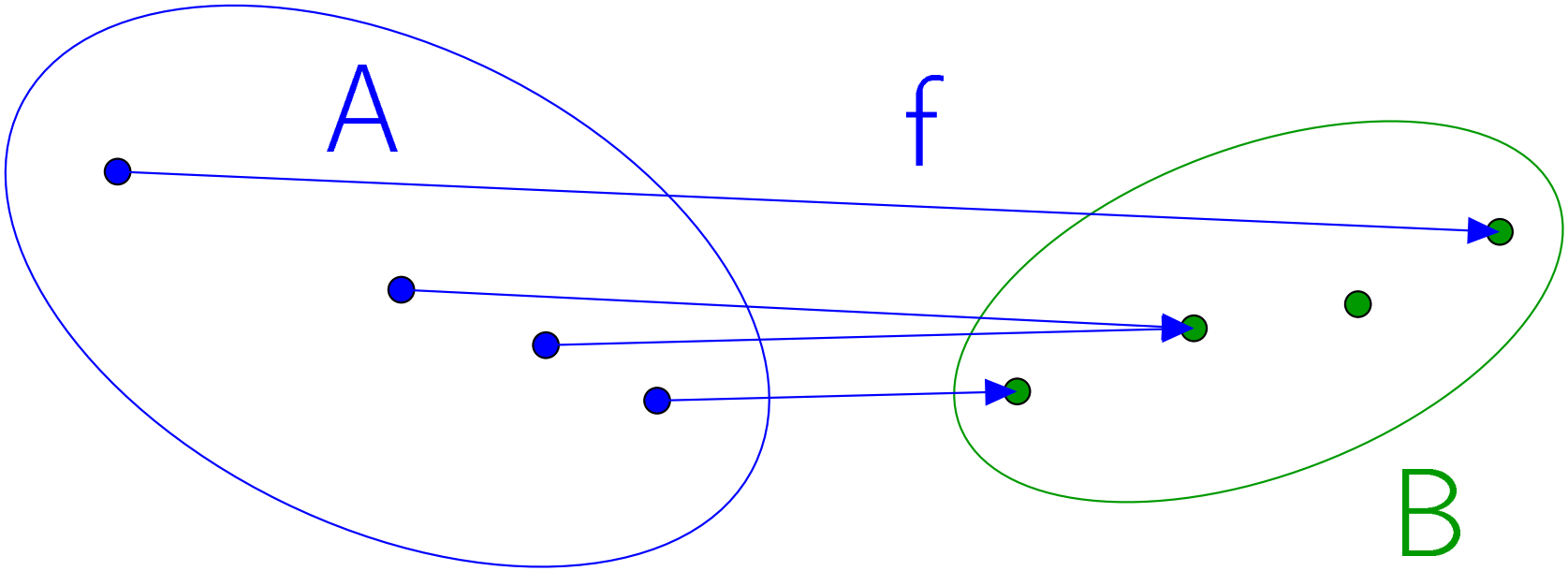
# Idea intuitiva de categoría



# Idea intuitiva de categoría

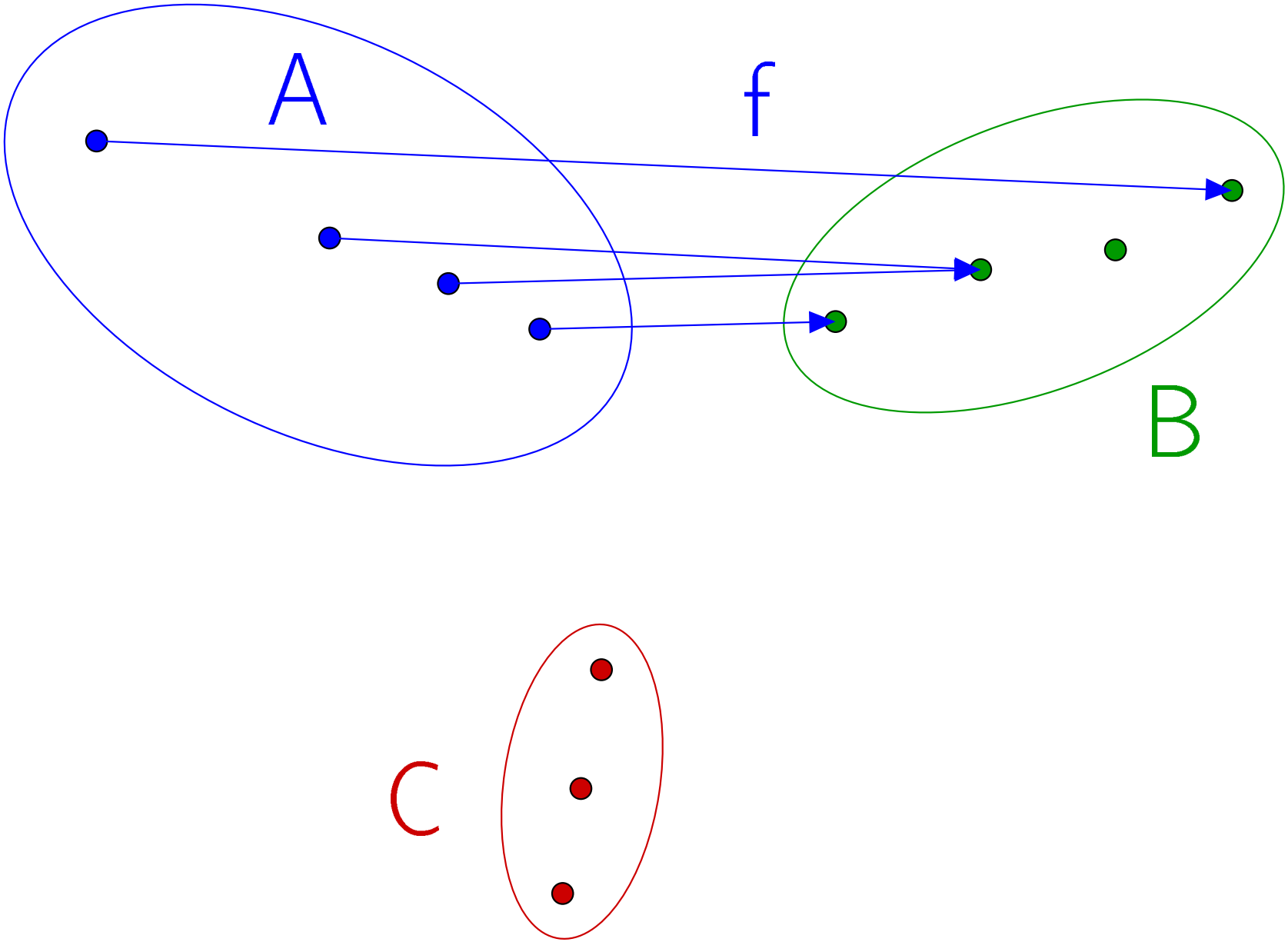


# Idea intuitiva de categoría

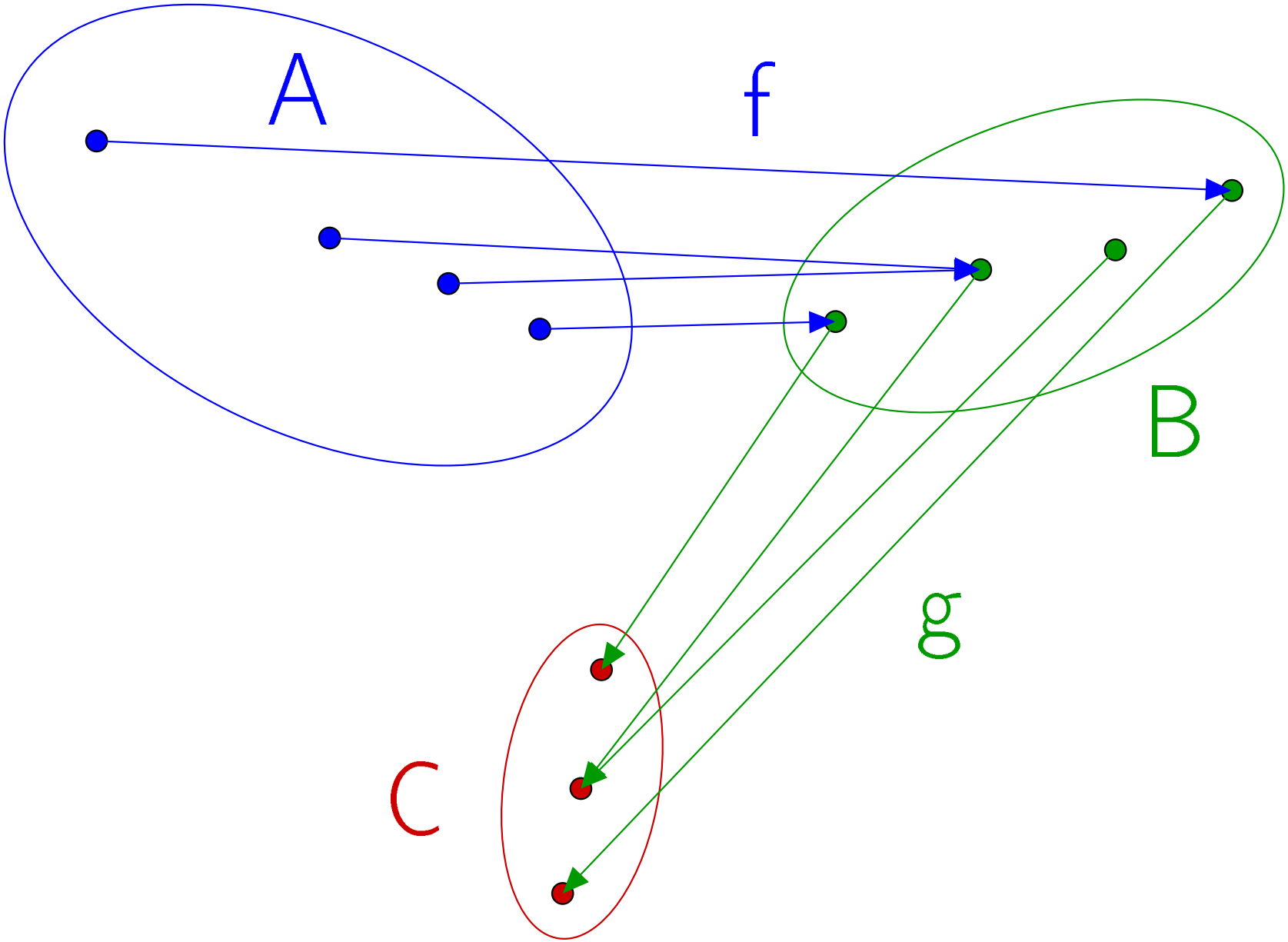



$$f : A \longrightarrow B$$

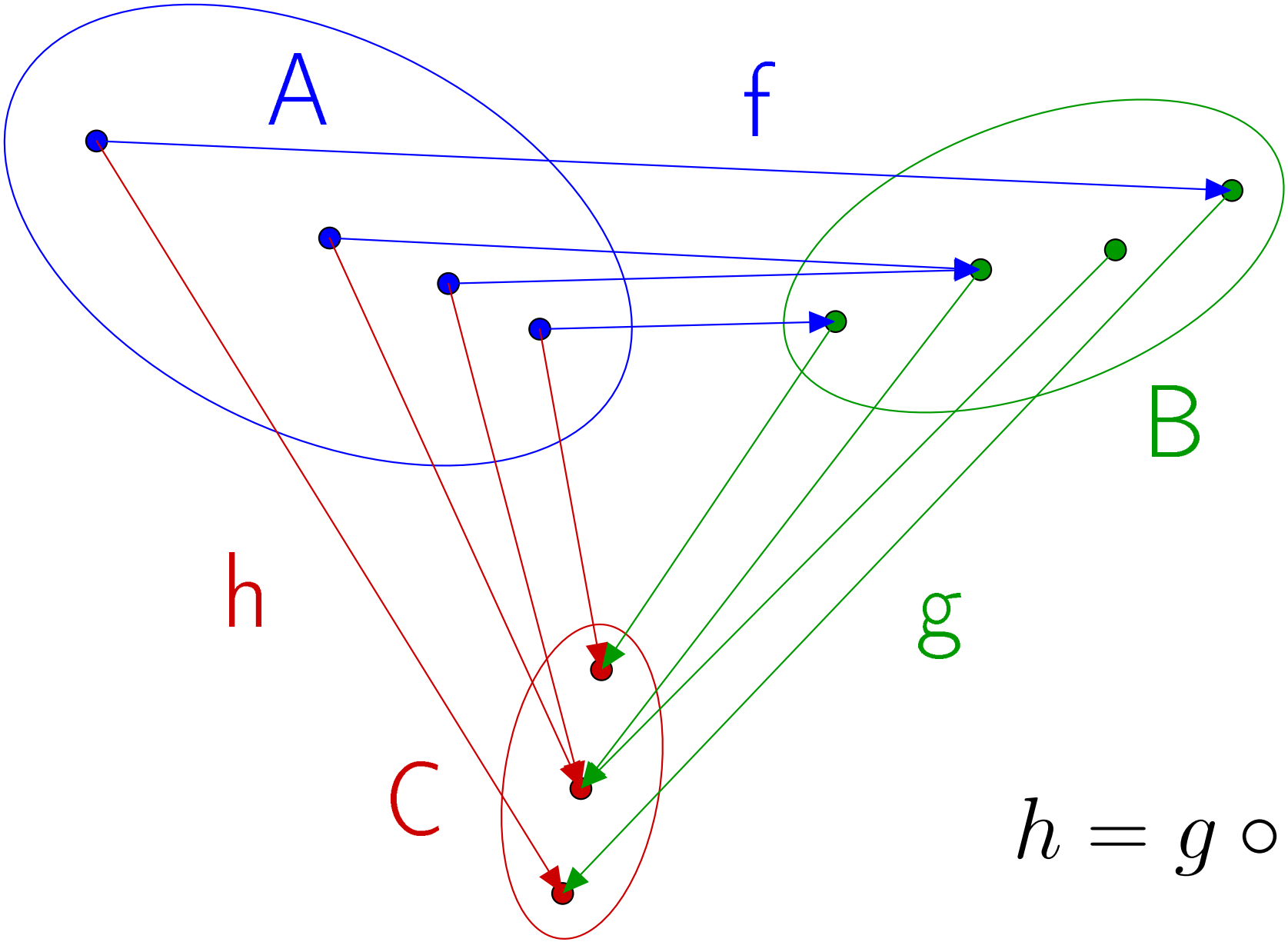
# Idea intuitiva de categoría



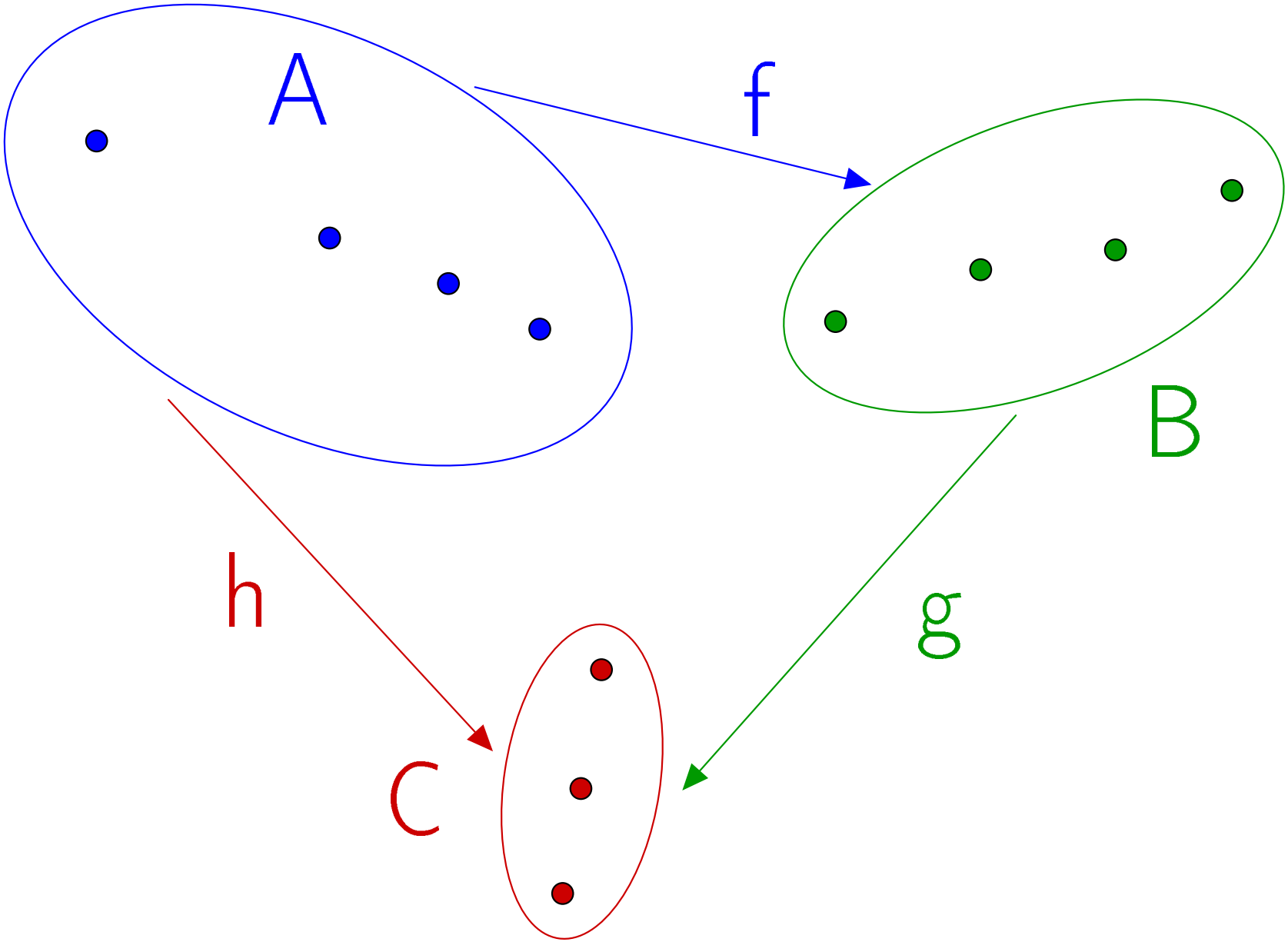
# Idea intuitiva de categoría



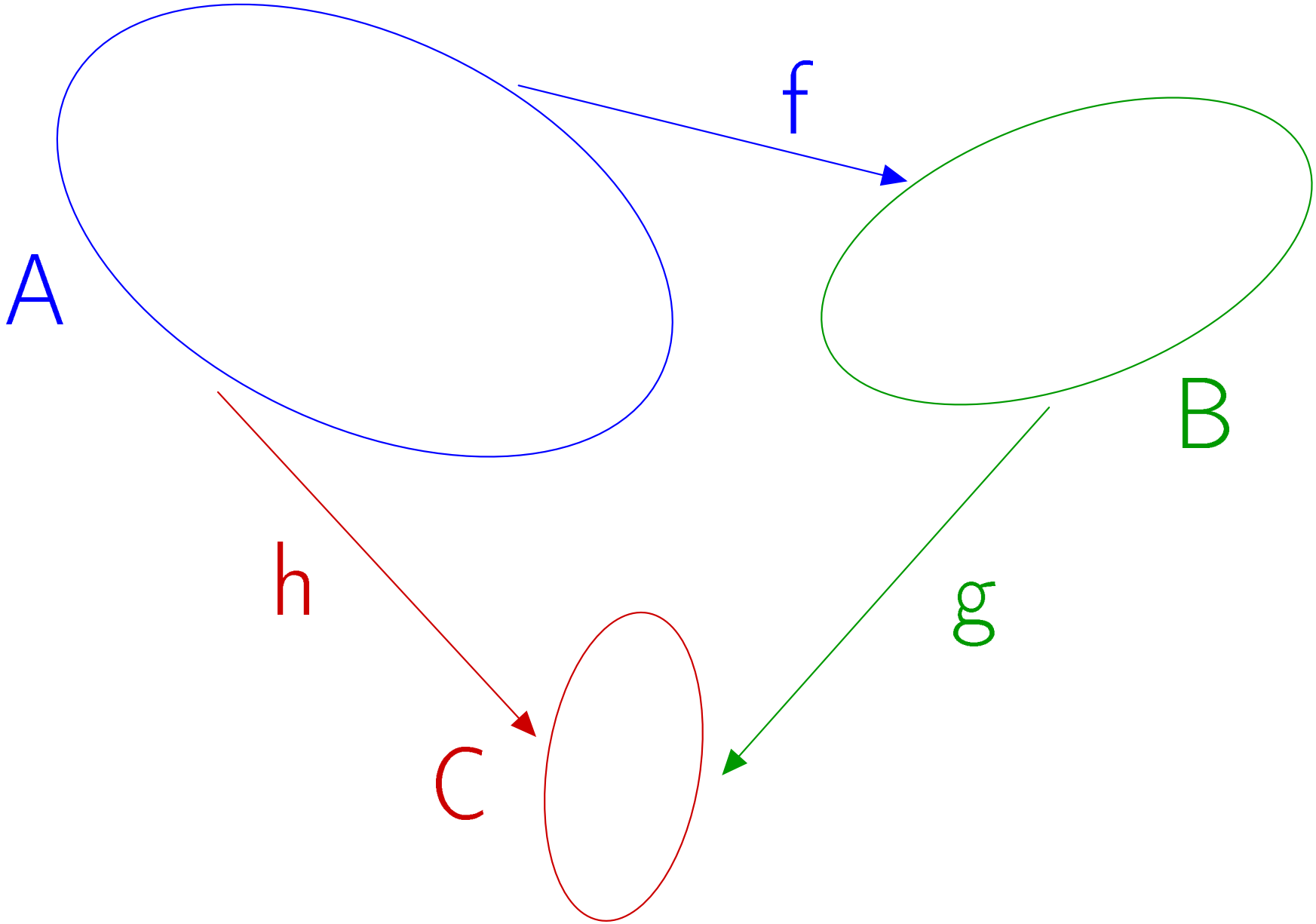
# Idea intuitiva de categoría



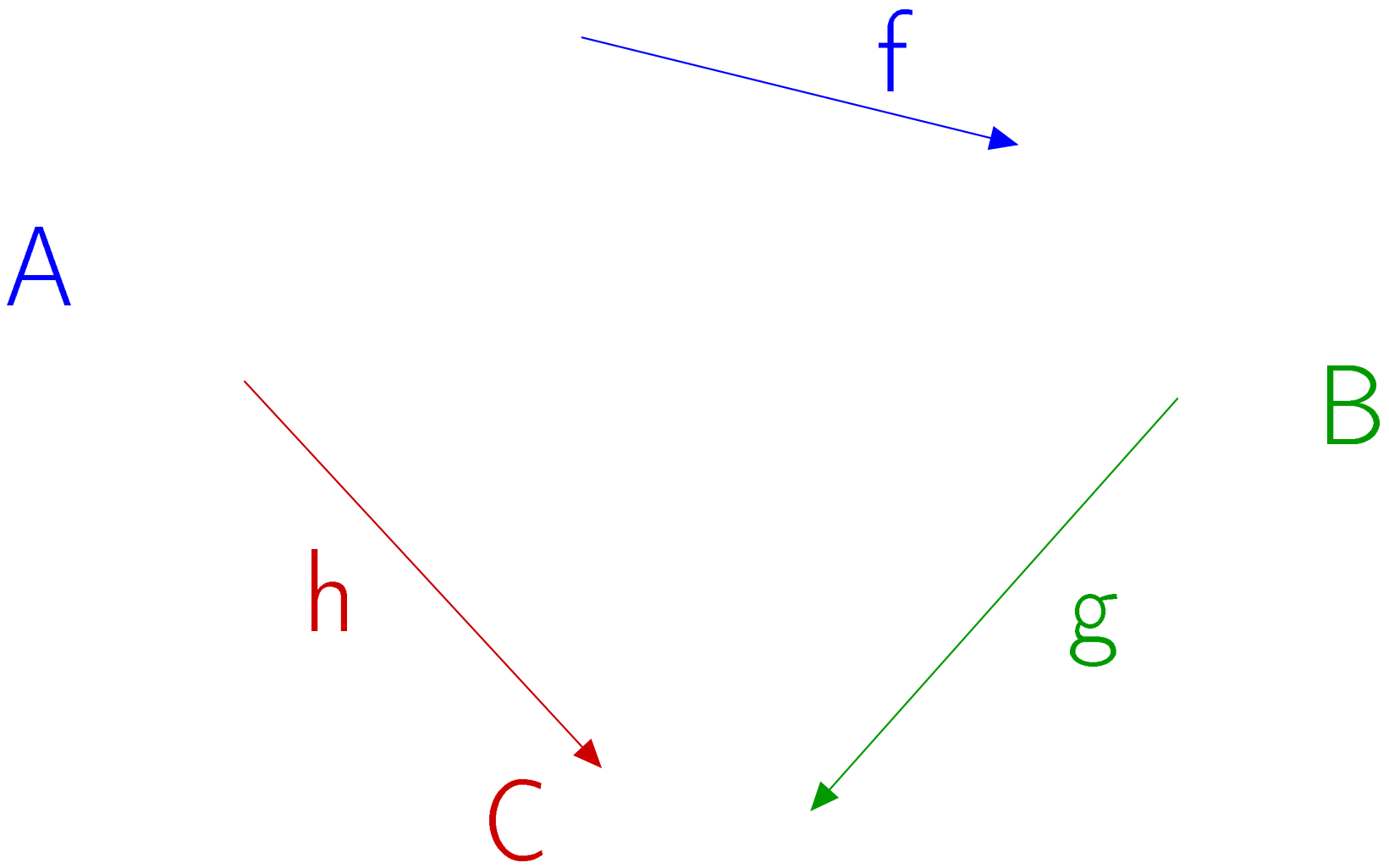
# Idea intuitiva de categoría



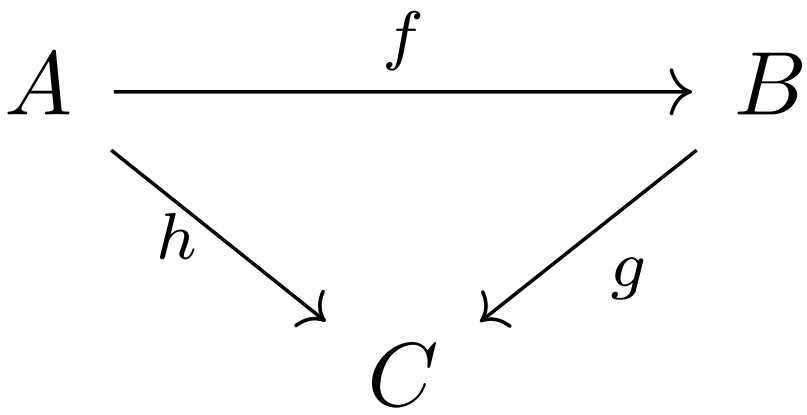
# Idea intuitiva de categoría



# Idea intuitiva de categoría



# Idea intuitiva de categoría



# Idea intuitiva de categoría

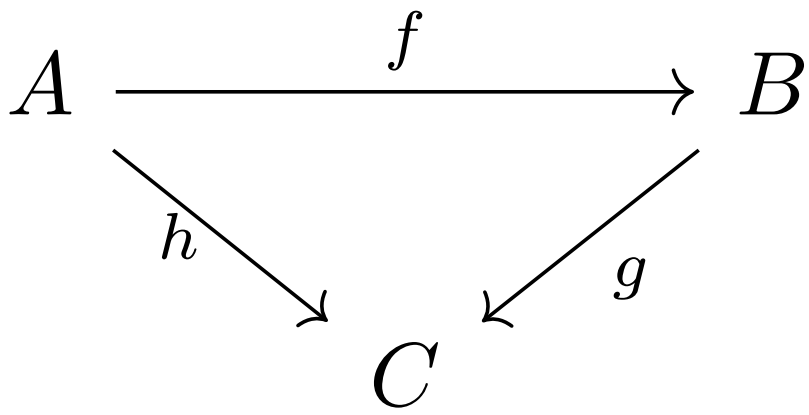
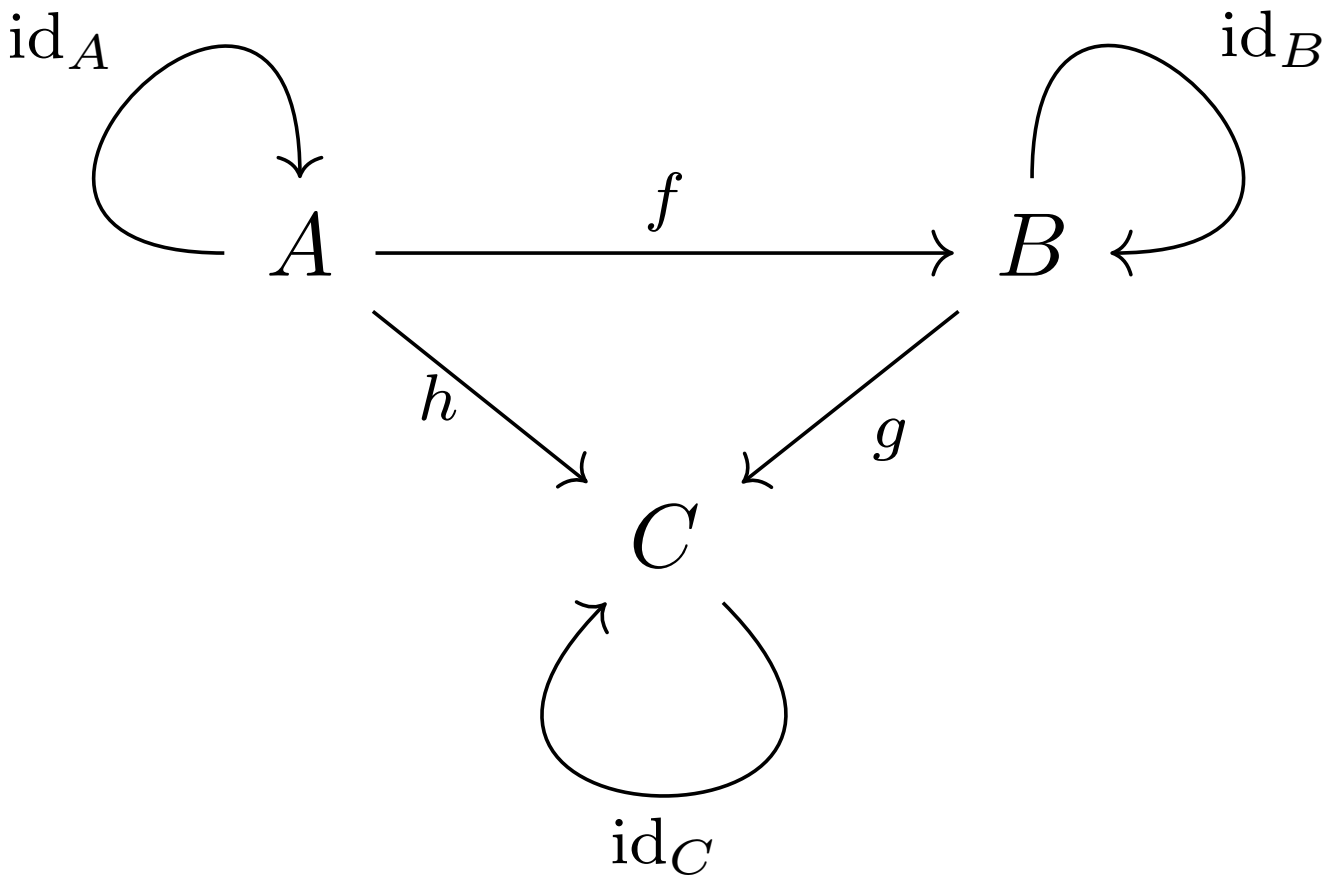
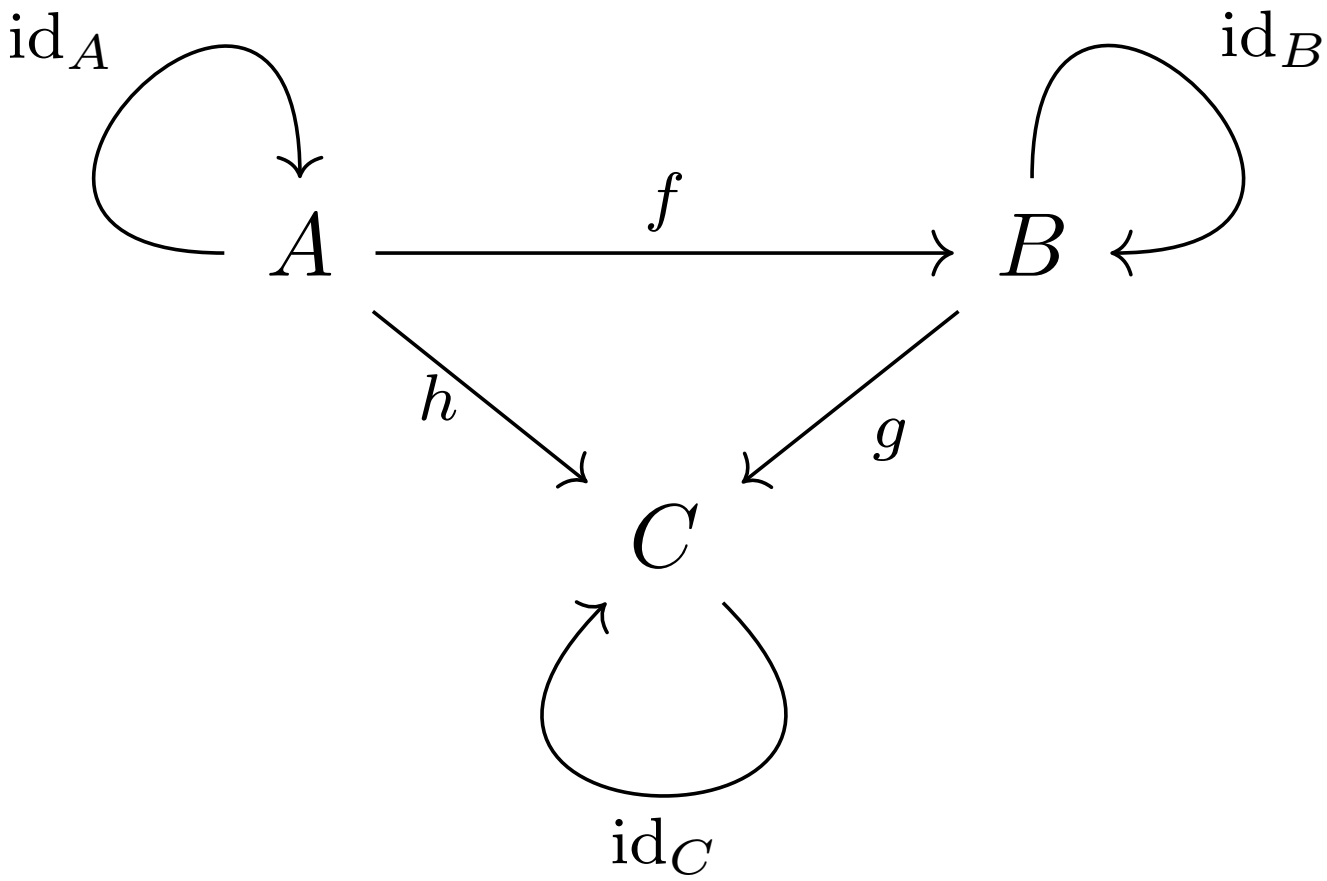



Diagrama conmutativo (representación de $h = g \circ f$)

# Idea intuitiva de categoría

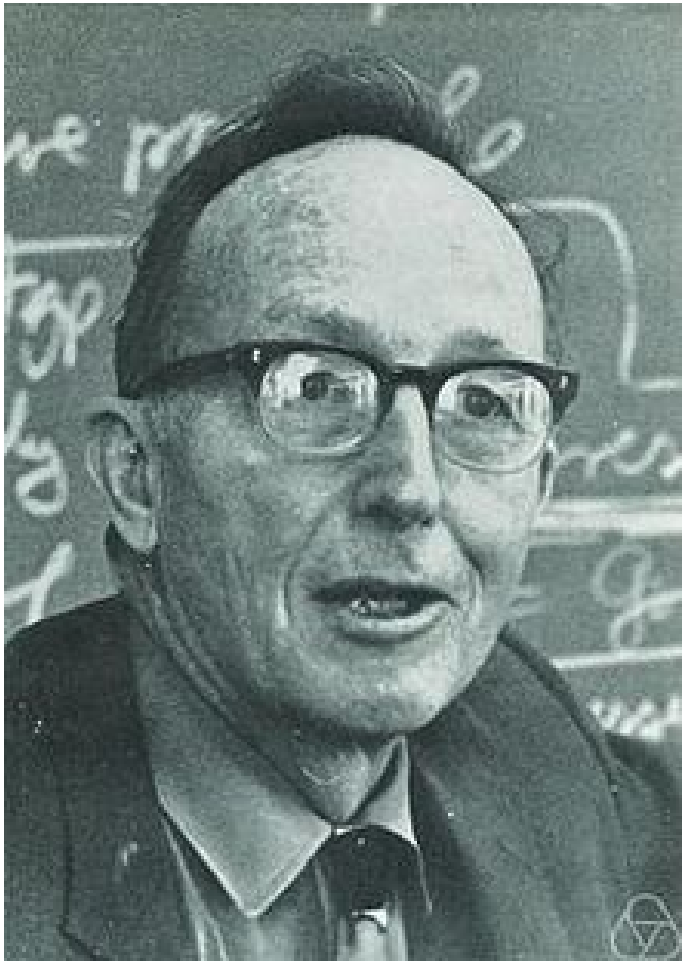


# Idea intuitiva de categoría




**[1941]** $\rightarrow$ Teoría de homotopía

# Fundadores



Saunders Mac Lane
1909 - 2005

Samuel Eilenberg
1913 - 1998

# Definición de categoría

**[1942 - 1945]**

Una categoría es un par de colecciones $\mathscr{C} = (\mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \mathrm{Fl}(\mathscr{C}) = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Fl}))$

# Definición de categoría

**[1942 - 1945]**

Una categoría es un par de colecciones $\mathscr{C} = (\mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \mathrm{Fl}(\mathscr{C}) = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Fl}))$ junto con:

- $\circ : \mathrm{Fl} \times \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Fl}$, parcial binaria

# Definición de categoría

**[1942 - 1945]**

Una categoría es un par de colecciones $\mathscr{C} = (\mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \mathrm{Fl}(\mathscr{C}) = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Fl}))$ junto con:

- $\circ : \mathrm{Fl} \times \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Fl}$, parcial binaria
- $\delta_0, \delta_1 : \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Ob}$, llamadas dominio y codominio,

# Definición de categoría

**[1942 - 1945]**

Una categoría es un par de colecciones $\mathscr{C} = (\mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \mathrm{Fl}(\mathscr{C}) = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Fl}))$ junto con:

- $\circ : \mathrm{Fl} \times \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Fl}$, parcial binaria
- $\delta_0, \delta_1 : \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Ob}$, llamadas dominio y codominio,
- $\mathrm{id} : \mathrm{Ob} \longrightarrow \mathrm{Fl}$

# Definición de categoría

**[1942 - 1945]**

Una categoría es un par de colecciones $\mathscr{C} = (\mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \mathrm{Fl}(\mathscr{C}) = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Fl}))$ junto con:

- $\circ : \mathrm{Fl} \times \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Fl}$, parcial binaria
- $\delta_0, \delta_1 : \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Ob}$, llamadas dominio y codominio,
- $\mathrm{id} : \mathrm{Ob} \longrightarrow \mathrm{Fl}$

que verifican:

- $\forall f, g \in \mathrm{Fl}$, $f \circ g$ está definida $\iff$ $\delta_1(g) = \delta_0(f)$.
  En dicho caso, $\delta_0(f \circ g) = \delta_0(g)$ y $\delta_1(f \circ g) = \delta_1(f)$

# Definición de categoría

**[1942 - 1945]**

Una categoría es un par de colecciones $\mathscr{C} = (\mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \mathrm{Fl}(\mathscr{C}) = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Fl}))$ junto con:

- $\circ : \mathrm{Fl} \times \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Fl}$, parcial binaria
- $\delta_0, \delta_1 : \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Ob}$, llamadas dominio y codominio,
- $\mathrm{id} : \mathrm{Ob} \longrightarrow \mathrm{Fl}$

que verifican:

- $\forall f, g \in \mathrm{Fl}$, $f \circ g$ está definida $\iff$ $\delta_1(g) = \delta_0(f)$.
  En dicho caso, $\delta_0(f \circ g) = \delta_0(g)$ y $\delta_1(f \circ g) = \delta_1(f)$
- $\circ$ es asociativa: $(f \circ g) \circ h$ está definida $\iff$ $f \circ (g \circ h)$ lo está;
  en cualquier caso $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

# Definición de categoría

**[1942 - 1945]**

Una categoría es un par de colecciones $\mathscr{C} = (\mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \mathrm{Fl}(\mathscr{C}) = (\mathrm{Ob}, \mathrm{Fl}))$ junto con:

- $\circ : \mathrm{Fl} \times \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Fl}$, parcial binaria
- $\delta_0, \delta_1 : \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Ob}$, llamadas dominio y codominio,
- $\mathrm{id} : \mathrm{Ob} \longrightarrow \mathrm{Fl}$

que verifican:

- $\forall f, g \in \mathrm{Fl}$, $f \circ g$ está definida $\iff$ $\delta_1(g) = \delta_0(f)$.
  En dicho caso, $\delta_0(f \circ g) = \delta_0(g)$ y $\delta_1(f \circ g) = \delta_1(f)$
- $\circ$ es asociativa: $(f \circ g) \circ h$ está definida $\iff$ $f \circ (g \circ h)$ lo está;
  en cualquier caso $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- $\forall x \in \mathrm{Ob}$, $\delta_0(\mathrm{id}(x)) = \delta_1(\mathrm{id}(x)) = x$
  $\forall f \in \mathrm{Fl}$, $x = \delta_0(f)$ implica $f \circ \mathrm{id}(x) = f$
  $y = \delta_1(f)$ implica que $\mathrm{id}(y) \circ f = f$

# Definición de categoría

Adoptaremos las notaciones:
$\mathrm{id}_x = \mathrm{id}(x)$

# Definición de categoría

Adoptaremos las notaciones:
$\mathrm{id}_x = \mathrm{id}(x)$

$f : a \longrightarrow b$ si $f \in \mathrm{Fl}$, $\delta_0(f) = a$ y $\delta_1(f) = b$

# Definición de categoría

Adoptaremos las notaciones:
$\mathrm{id}_x = \mathrm{id}(x)$

$f : a \longrightarrow b$ si $f \in \mathrm{Fl}$, $\delta_0(f) = a$ y $\delta_1(f) = b$

Siempre que se sobre entienda del contexto, evitaremos poner el símbolo $\circ$ para la composición de flechas ($f \circ g = fg$)

# Definición de categoría

Adoptaremos las notaciones:
$\mathrm{id}_x = \mathrm{id}(x)$

$f : a \longrightarrow b$ si $f \in \mathrm{Fl}$, $\delta_0(f) = a$ y $\delta_1(f) = b$

Siempre que se sobre entienda del contexto, evitaremos poner el símbolo $\circ$ para la composición de flechas ($f \circ g = fg$)

Cuando se tenga la composición de tres o más flechas, obviaremos la utilización de los paréntesis

# Ejemplos de categorías

**Set** Objetos: conjuntos; flechas: funciones entre ellos.

# Ejemplos de categorías

**Set** Objetos: conjuntos; flechas: funciones entre ellos.

**Grp** Objetos: grupos; flechas: morfismos que respetan las operaciones.

# Ejemplos de categorías

**Set** Objetos: conjuntos; flechas: funciones entre ellos.

**Grp** Objetos: grupos; flechas: morfismos que respetan las operaciones.

**BA** Ojetos: álgebras de Boole; flechas: morfismos que preservan orden y el máximo.

# Ejemplos de categorías

**Set** Objetos: conjuntos; flechas: funciones entre ellos.

**Grp** Objetos: grupos; flechas: morfismos que respetan las operaciones.

**BA** Ojetos: álgebras de Boole; flechas: morfismos que preservan orden y el máximo.

**FDL** Ojetos: retículos distributivos finitos; flechas: morfismos que preservan el orden.

# Ejemplos de categorías

**Set** Objetos: conjuntos; flechas: funciones entre ellos.

**Grp** Objetos: grupos; flechas: morfismos que respetan las operaciones.

**BA** Ojetos: álgebras de Boole; flechas: morfismos que preservan orden y el máximo.

**FDL** Ojetos: retículos distributivos finitos; flechas: morfismos que preservan el orden.

**FPos** Objetos: conjuntos finitos parcialmente ordenados; flechas: morfismos que preservan el orden.

# Ejemplos de categorías

**Set** Objetos: conjuntos; flechas: funciones entre ellos.

**Grp** Objetos: grupos; flechas: morfismos que respetan las operaciones.

**BA** Ojetos: álgebras de Boole; flechas: morfismos que preservan orden y el máximo.

**FDL** Ojetos: retículos distributivos finitos; flechas: morfismos que preservan el orden.

**FPos** Objetos: conjuntos finitos parcialmente ordenados; flechas: morfismos que preservan el orden.

**Top** Objetos: espacios topológicos; flechas: funciones continuas.

# Otros ejemplos de categorías

**$\mathbf{Matr}_F$** (la categoría de todas las matrices rectangulares, con entradas en $F$) Objetos: los naturales; flechas: la matriz $A$ de $m \times n$ es considerada como una flecha $A : n \to m$, con la composición el producto usual de matrices

# Otros ejemplos de categorías

**$\mathbf{Matr}_F$** (la categoría de todas las matrices rectangulares, con entradas en $F$) Objetos: los naturales; flechas: la matriz $A$ de $m \times n$ es considerada como una flecha $A : n \to m$, con la composición el producto usual de matrices

- Todo preorden puede ser considerado como una categoría, donde existirá $p \to p'$ sii $p \leq p'$. En particular, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ pueden ser consideradas como categorías

# Otros ejemplos de categorías

**$\mathbf{Matr}_F$** (la categoría de todas las matrices rectangulares, con entradas en $F$) Objetos: los naturales; flechas: la matriz $A$ de $m \times n$ es considerada como una flecha $A : n \to m$, con la composición el producto usual de matrices

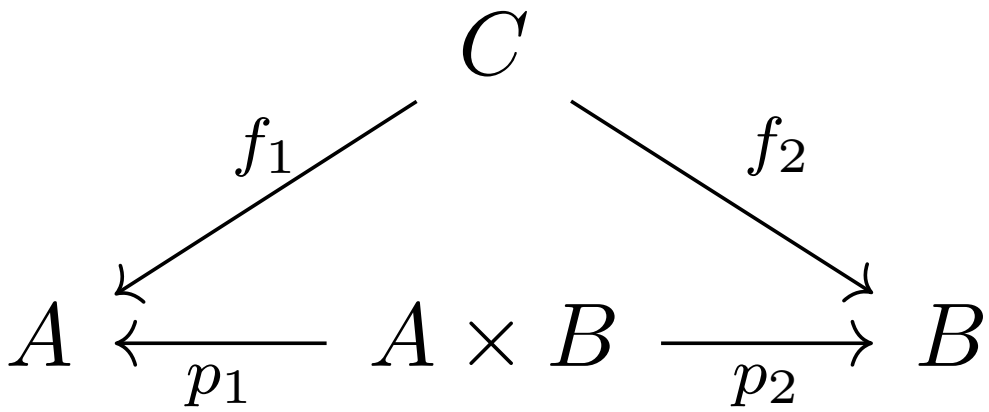
- Todo preorden puede ser considerado como una categoría, donde existirá $p \to p'$ sii $p \leq p'$. En particular, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ pueden ser consideradas como categorías

**$\mathbf{Cat}$** La categoría de todas las categorías

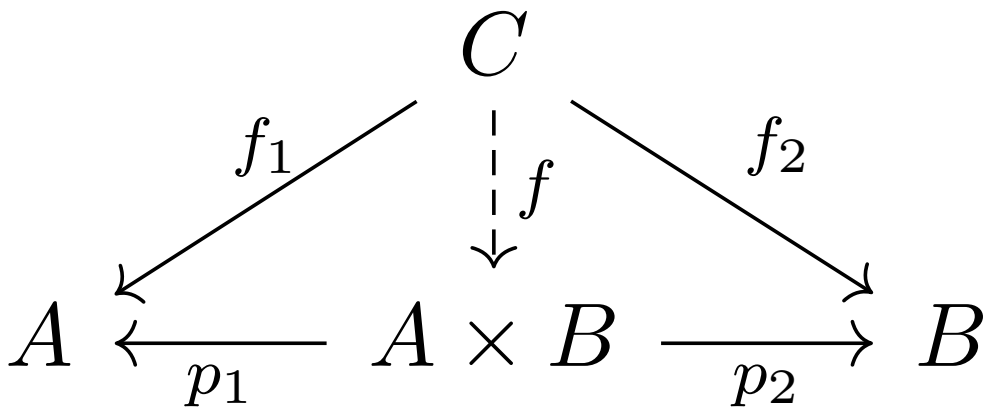
# El producto

$$A \xleftarrow[p_1]{} A \times B \xrightarrow[p_2]{} B$$

# El producto



# El producto



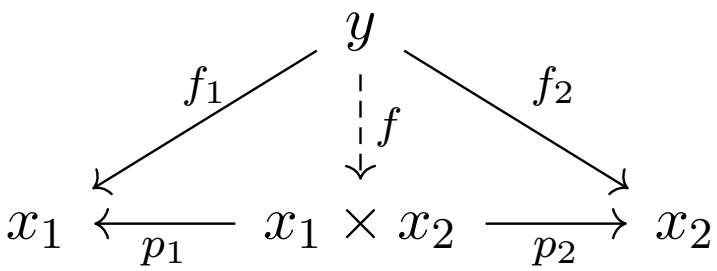

$$f(c) = (f_1(c), f_2(c))$$

# El producto

$\{x_i\}_{i\in I}$ con $x_i$ objetos. El producto es un par

$$\langle \sqcap_{i\in I} x_i, \{p_i : \sqcap_{i\in I} x_i \mapsto x_i\}_{i\in I} \rangle$$

tal que dado cualquier otro par $\langle y, \{f_i : y \mapsto x_i\}_{i\in I}\rangle$, existe una única flecha $f : y \mapsto \sqcap_{i\in I} x_i$ que satisface $f_i = p_i \circ f$ para todo $i \in I$.

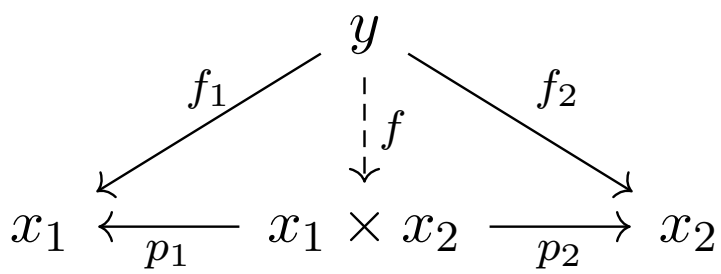


# El producto

$\{x_i\}_{i\in I}$ con $x_i$ objetos. El producto es un par

$$\langle \sqcap_{i\in I} x_i, \{p_i : \sqcap_{i\in I} x_i \mapsto x_i\}_{i\in I} \rangle$$

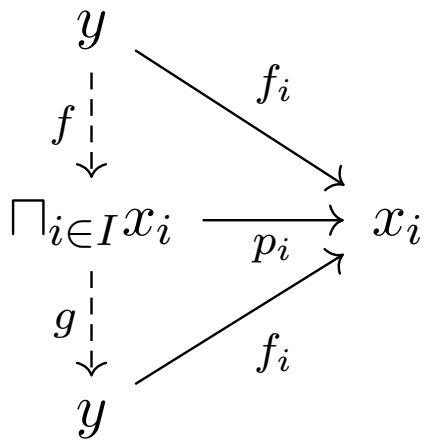
tal que dado cualquier otro par $\langle y, \{f_i : y \mapsto x_i\}_{i\in I}\rangle$, existe una única flecha $f : y \mapsto \sqcap_{i\in I} x_i$ que satisface $f_i = p_i \circ f$ para todo $i \in I$.




Si el producto existe, es único salvo isomorfismo

# El producto

Supongamos que $\langle y, \{f_i : y \mapsto x_i\}_{i \in I} \rangle$, es otro producto de $\{x_i\}_{i \in I}$, luego los siguientes dos diagramas conmutan para todo $x_i$

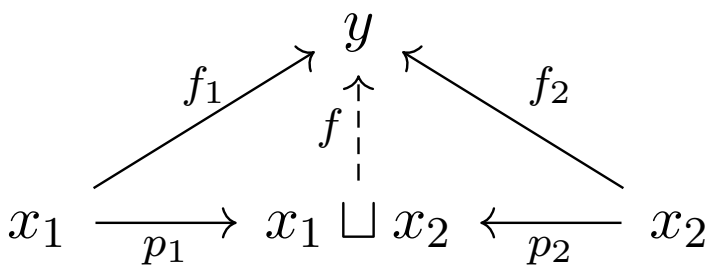



y por lo tanto $g \circ f = \mathrm{id}_y$

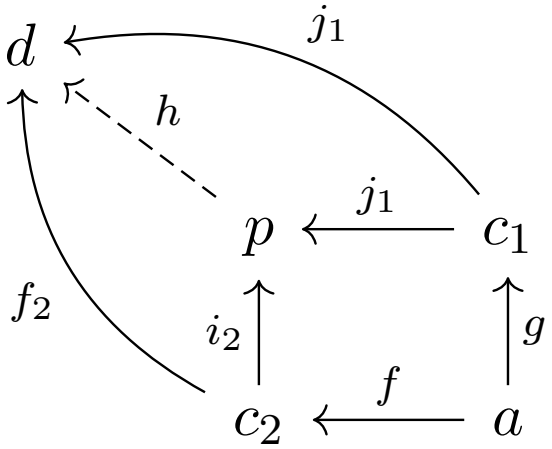
# Dualidad

Decimos que dos propiedades (categorías) son duales si una se obtiene de la otra, invirtiendo el sentido de sus flechas

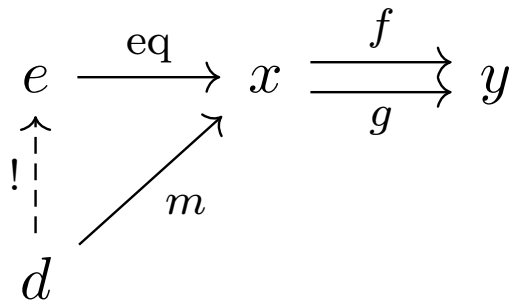
# Otras construcciones (*límites* **[1948 - 1950]**)




Coproducto




Pushout




Ecualizador

# Funtores

Llamaremos funtor a un morfismo de categorías

$$\mathrm{T} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D},$$

compuesto de dos funciones, la función objeto y la función flecha

La primera asigna a cada objeto $c$ de $\mathscr{C}$, el objeto $\mathrm{T}c$ en $\mathscr{D}$

La segunda asigna a cada flecha $f : c \to c'$ de $\mathscr{C}$, la flecha $\mathrm{T}f : \mathrm{T}c \to \mathrm{T}c'$

Y satisfacen

$$\mathrm{T}\mathrm{id}_c = \mathrm{id}_{\mathrm{T}c} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{T}(f \circ g) = \mathrm{T}f \circ \mathrm{T}g.$$

# Ejemplos de funtores

$\mathscr{P} : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$

asigna a cada conjunto su conjunto de partes

y a cada función $X \xrightarrow{f} Y$, aquella que a cada $V \subset X$ lo mapea a $f(V) \subset Y$

# Ejemplos de funtores

$U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$
a cada grupo $G$ le asigna el conjunto de sus elementos
a cada morfismo de grupos $f$, le asigna la función correspondiente entre sus elementos

# Ejemplos de funtores

$U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$
a cada grupo $G$ le asigna el conjunto de sus elementos
a cada morfismo de grupos $f$, le asigna la función correspondiente entre sus elementos

Funtores de este tipo son conocidos como funtores olvido, y son caracterizados por enviar una cierta estructura en su conjunto de elementos y los morfismos de la estructura, en funciones entre los conjuntos.

# Ejemplos de funtores

$\mathscr{C}(c, \cdot) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$; $c$ un elemento de $\mathscr{C}$
a cada objeto $d$ de $\mathscr{C}$, le asigna el conjunto de todas las flechas entre $c$ y $d$
dada una flecha $f : d \to d'$, le asigna la función en $\mathbf{Set}$:

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(c, f) : \quad & \mathscr{C}(c, d) \to \mathscr{C}(c, d') \\ & (g : c \mapsto d) \mapsto (f \circ g : c \mapsto d') \end{aligned}$$

# Funtores covariantes vs. contravariantes

Los funtores definidos anteriormente son covariantes

# Funtores covariantes vs. contravariantes

Los funtores definidos anteriormente son covariantes

Si *invierte* el sentido de la flecha (es decir, si la imagen de $f : c \to c'$ es $\mathrm{T}f : \mathrm{T}c' \to \mathrm{T}c$), decimos que el funtor es contravariante

# Transformaciones naturales

$\mathrm{S}$ y $\mathrm{T}$ funtores de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$

Una transformación natural $\tau = \{\tau_c\}_{c \in \mathscr{C}}$ de $\mathrm{S}$ a $\mathrm{T}$ es una familia de flechas que satisface:

1. $\tau_c \in \mathrm{Fl}(\mathscr{D})$ y $\tau_c : \mathrm{S}c \to \mathrm{T}c \quad \forall c \in \mathscr{C}$;
2. si $f : c \to c'$ es una flecha en $\mathscr{C}$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} c & & \mathrm{S}c \xrightarrow{\tau_c} \mathrm{T}c \\ f \downarrow & & \mathrm{S}f \downarrow \qquad\quad \downarrow \mathrm{T}f \\ c' & & \mathrm{S}c' \xrightarrow[\tau_{c'}]{} \mathrm{T}c' \end{array}$$

# Equivalencias

Generalmente queremos saber cuando dos categorías son similares

# Equivalencias

Generalmente queremos saber cuando dos categorías son similares

Un funtor $\mathrm{S} : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ es un isomorfismo de categorías si existe $\mathrm{T} : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ tal que $\mathrm{ST} = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ y $\mathrm{TS} = \mathrm{id}_{\mathscr{A}}$.

# Equivalencias

Generalmente queremos saber cuando dos categorías son similares

Un funtor $\mathrm{S} : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ es un isomorfismo de categorías si existe $\mathrm{T} : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ tal que $\mathrm{ST} = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ y $\mathrm{TS} = \mathrm{id}_{\mathscr{A}}$.

Si en la definición anterior pedimos $\mathrm{ST} \simeq \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ y $\mathrm{TS} \simeq \mathrm{id}_{\mathscr{A}}$, decimos que $\mathrm{S}$ es una equivalencia de categorías.

# Equivalencias

Generalmente queremos saber cuando dos categorías son similares

Un funtor $\mathrm{S} : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ es un isomorfismo de categorías si existe $\mathrm{T} : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ tal que $\mathrm{ST} = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ y $\mathrm{TS} = \mathrm{id}_{\mathscr{A}}$.

Si en la definición anterior pedimos $\mathrm{ST} \simeq \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ y $\mathrm{TS} \simeq \mathrm{id}_{\mathscr{A}}$, decimos que $\mathrm{S}$ es una equivalencia de categorías.

Cuando la equivalencia es entre una categoría y el dual de otra categoría (es decir, cuando el funtor que la determina es contravariante), decimos que es una dualidad de categorías

# Funtores fieles, plenos y densos

Es fiel si, dadas dos flechas $f, g : c \to c'$ distintas, tenemos que $\mathrm{T}f \neq \mathrm{T}g$.

# Funtores fieles, plenos y densos

Es fiel si, dadas dos flechas $f, g : c \to c'$ distintas, tenemos que $\mathrm{T}f \neq \mathrm{T}g$.
i.e., es inyectivo en flechas.

# Funtores fieles, plenos y densos

Es fiel si, dadas dos flechas $f, g : c \to c'$ distintas, tenemos que $\mathrm{T}f \neq \mathrm{T}g$. i.e., es inyectivo en flechas.

Un funtor $\mathrm{T} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es pleno si, para toda flecha $\mathrm{T}c \xrightarrow{f} \mathrm{T}c'$ en $\mathscr{D}$, existe $c \xrightarrow{g} c'$ de manera que $f = \mathrm{T}g$.

# Funtores fieles, plenos y densos

Es fiel si, dadas dos flechas $f, g : c \to c'$ distintas, tenemos que $\mathrm{T}f \neq \mathrm{T}g$. i.e., es inyectivo en flechas.

Un funtor $\mathrm{T} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es pleno si, para toda flecha $\mathrm{T}c \xrightarrow{f} \mathrm{T}c'$ en $\mathscr{D}$, existe $c \xrightarrow{g} c'$ de manera que $f = \mathrm{T}g$. i.e., es sobreyectivo en flechas.

# Funtores fieles, plenos y densos

Es fiel si, dadas dos flechas $f, g : c \to c'$ distintas, tenemos que $\mathrm{T}f \neq \mathrm{T}g$. i.e., es inyectivo en flechas.

Un funtor $\mathrm{T} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es pleno si, para toda flecha $\mathrm{T}c \xrightarrow{f} \mathrm{T}c'$ en $\mathscr{D}$, existe $c \xrightarrow{g} c'$ de manera que $f = \mathrm{T}g$. i.e., es sobreyectivo en flechas.

Es denso si para todo objeto $d \in \mathscr{D}$ existe un objeto $c \in \mathscr{C}$ tal que $d \simeq \mathrm{T}c$.

# Funtores fieles, plenos y densos

Es fiel si, dadas dos flechas $f, g : c \to c'$ distintas, tenemos que $\mathrm{T}f \neq \mathrm{T}g$. i.e., es inyectivo en flechas.

Un funtor $\mathrm{T} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ es pleno si, para toda flecha $\mathrm{T}c \xrightarrow{f} \mathrm{T}c'$ en $\mathscr{D}$, existe $c \xrightarrow{g} c'$ de manera que $f = \mathrm{T}g$. i.e., es sobreyectivo en flechas.

Es denso si para todo objeto $d \in \mathscr{D}$ existe un objeto $c \in \mathscr{C}$ tal que $d \simeq \mathrm{T}c$.

Un funtor $\mathrm{S} : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ es una equivalencia de categorías sii es fiel, pleno y denso.

# Un ejemplo de equivalencia

$F$ un cuerpo
$\mathbf{FinVec}_F$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $F$ (con flechas las transformaciones lineales)
$\mathbf{Matr}_F$ como antes
Luego $\mathbf{FinVec}_F$ es equivalente a $\mathbf{Matr}_F$.

# Un ejemplo de equivalencia

$F$ un cuerpo
$\mathbf{FinVec}_F$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $F$ (con flechas las transformaciones lineales)
$\mathbf{Matr}_F$ como antes
Luego $\mathbf{FinVec}_F$ es equivalente a $\mathbf{Matr}_F$.

## Demostración

$$\begin{aligned} \mathrm{T}: \ \mathbf{FinVec}_F &\to \mathbf{Matr}_F \\ \mathbb{V} &\mapsto \dim(\mathbb{V}) \\ (f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}) &\mapsto A \end{aligned}$$

con $A$ la representación matricial de la transformación lineal $f$ para alguna base de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$

# Un ejemplo de equivalencia

$F$ un cuerpo
$\mathbf{FinVec}_F$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $F$ (con flechas las transformaciones lineales)
$\mathbf{Matr}_F$ como antes
Luego $\mathbf{FinVec}_F$ es equivalente a $\mathbf{Matr}_F$.

**Demostración**

Es fiel, pues para dos transformaciones distintas, sus representaciones matriciales también lo son

# Un ejemplo de equivalencia

$F$ un cuerpo
$\mathbf{FinVec}_F$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $F$ (con flechas las transformaciones lineales)
$\mathbf{Matr}_F$ como antes
Luego $\mathbf{FinVec}_F$ es equivalente a $\mathbf{Matr}_F$.

**Demostración**

Es pleno, pues dada cualquier matriz $A$ podemos definir una transformación natural cuya representación matricial sea $A$

# Un ejemplo de equivalencia

$F$ un cuerpo
$\mathbf{FinVec}_F$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre $F$ (con flechas las transformaciones lineales)
$\mathbf{Matr}_F$ como antes
Luego $\mathbf{FinVec}_F$ es equivalente a $\mathbf{Matr}_F$.

## Demostración

Es claramente denso, pues para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $F^n$, y entonces $\mathrm{T}(F^n) = n$

# Otros ejemplos de equivalencia

**Stone** Entre la categoría de las álgebras de Boole y los espacios de Stone (espacios compactos y totalmente disconexos)

# Otros ejemplos de equivalencia

**Stone** Entre la categoría de las álgebras de Boole y los espacios de Stone (espacios compactos y totalmente disconexos)

**Gelfand** Entre la categoría de $\mathbf{C}^*-$álgebras conmutativas y la de los espacios de Hausdorff compactos

1 Categorías
- Definición
- Construcciones
- Funtores y transformaciones naturales
- Equivalencias (y dualidades)

2 Decategorificación y los números naturales
- Intuición
- Decategorificación de $\mathbf{FinSet}$

3 Bibliografía

# Contando ovejas

## La parábola del pastor

Long ago, when shepherds wanted to see if two herds of sheep were isomorphic, they would look for an explicit isomorphism. In other words, they would line up both herds and try to match each sheep in one herd with a sheep in the other.

# Contando ovejas

## La parábola del pastor

Long ago, when shepherds wanted to see if two herds of sheep were isomorphic, they would look for an explicit isomorphism. In other words, they would line up both herds and try to match each sheep in one herd with a sheep in the other.

But one day, along came a shepherd who invented decategorification. She realized one could take each herd and 'count' it, setting up an isomorphism between it and some set of 'numbers', which were nonsense words like 'one, two, three,?' specially designed for this purpose.

# Contando ovejas

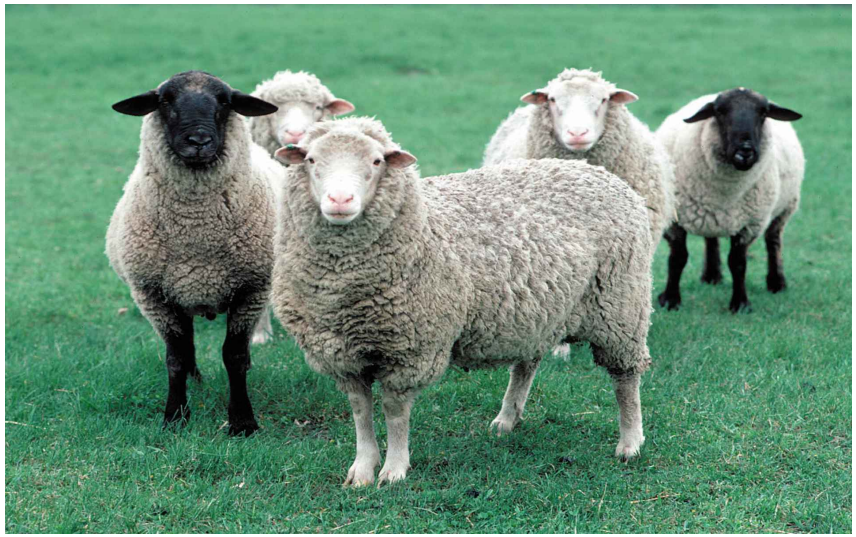
## La parábola del pastor

Long ago, when shepherds wanted to see if two herds of sheep were isomorphic, they would look for an explicit isomorphism. In other words, they would line up both herds and try to match each sheep in one herd with a sheep in the other.

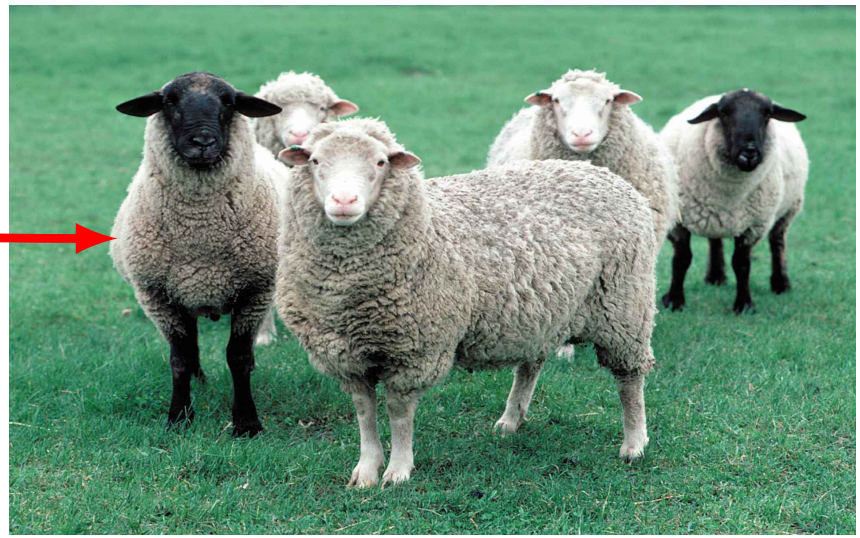
But one day, along came a shepherd who invented decategorification. She realized one could take each herd and 'count' it, setting up an isomorphism between it and some set of 'numbers', which were nonsense words like 'one, two, three,?' specially designed for this purpose.

By comparing the resulting numbers, she could show that two herds were isomorphic without explicitly establishing an isomorphism! In short, by decategorifying the category of finite sets, the set of natural numbers was invented.

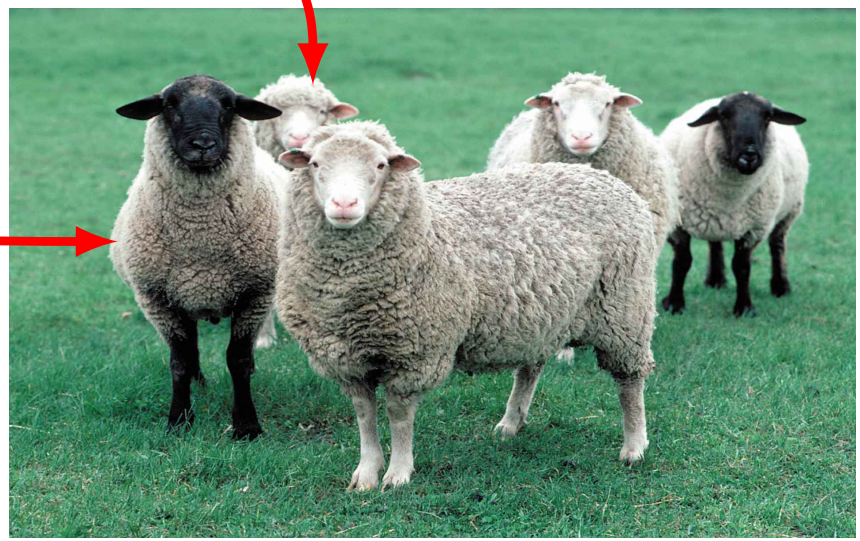
# Contando ovejas



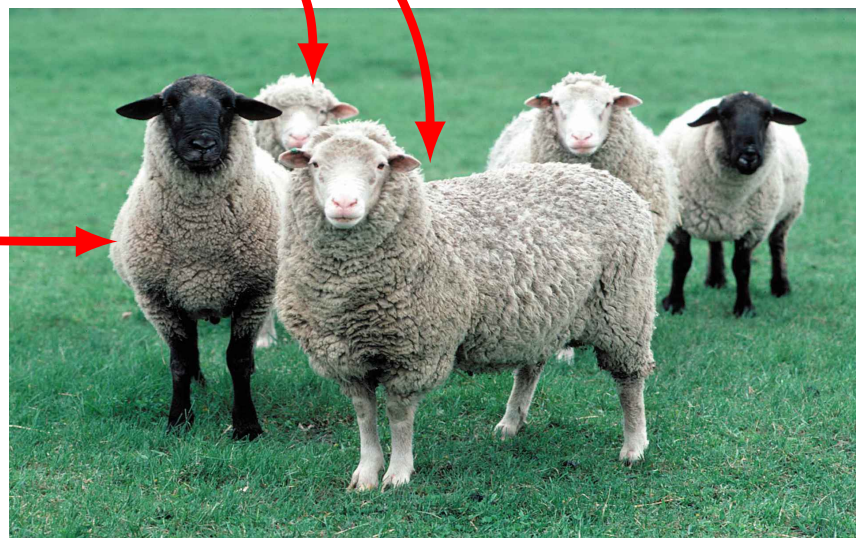
# Contando ovejas



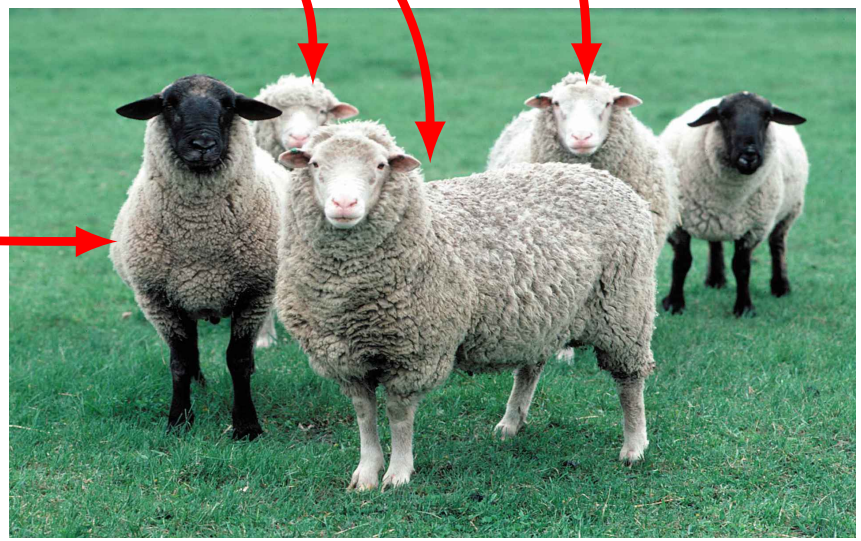
# Contando ovejas



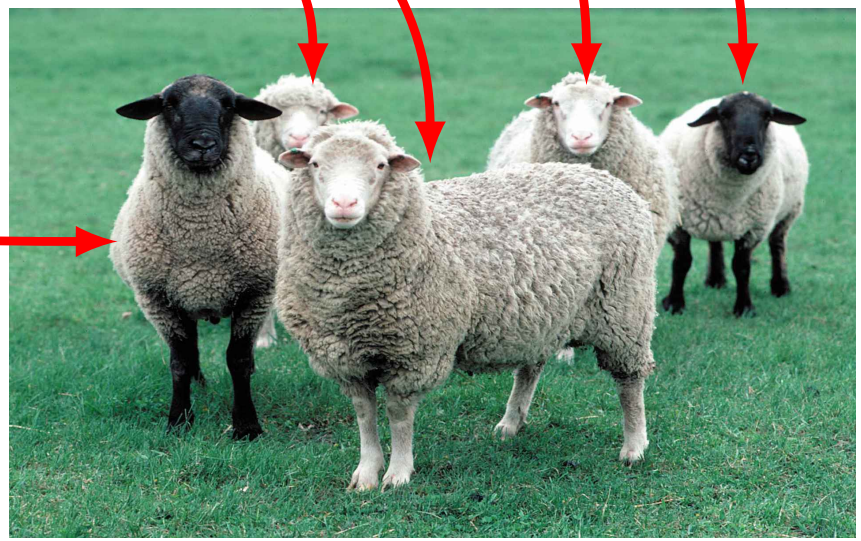
# Contando ovejas



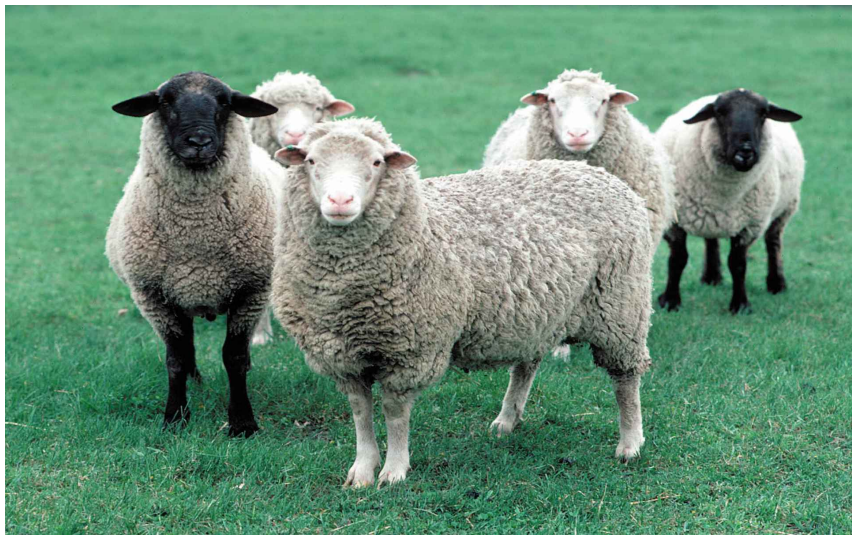
# Contando ovejas



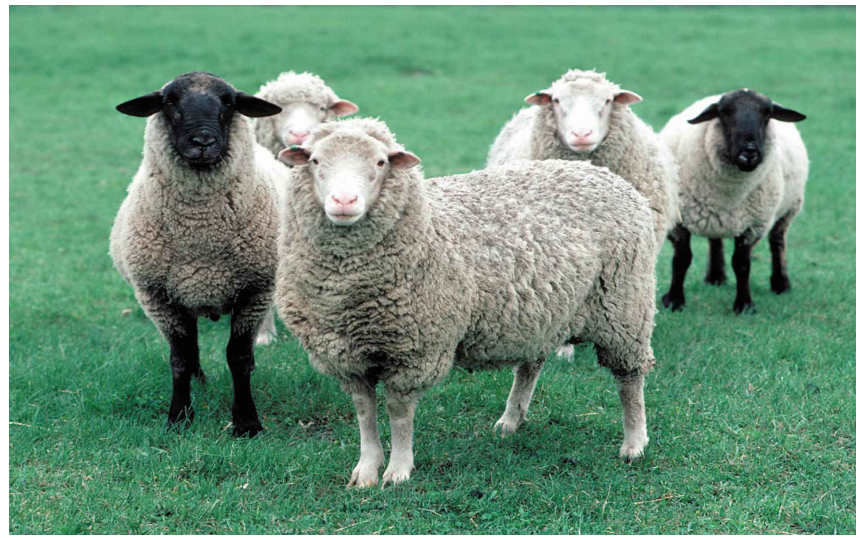
# Contando ovejas



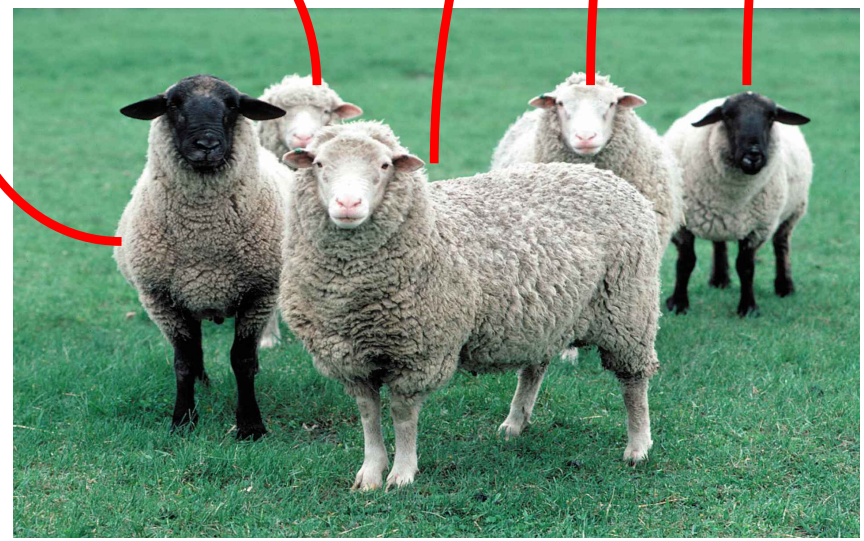
# Contando ovejas



# Contando ovejas



# Contando ovejas



# Definición de $\mathscr{N}$

Vamos a definir $\mathscr{N}$ como el conjunto de las clases de equivalencia, donde dos conjuntos en $\mathbf{FinSet}$ son equivalentes si existe una biyección entre ellos (son isomorfos en $\mathbf{FinSet}$)

# Definición de $\mathscr{N}$

Vamos a definir $\mathscr{N}$ como el conjunto de las clases de equivalencia, donde dos conjuntos en $\mathbf{FinSet}$ son equivalentes si existe una biyección entre ellos (son isomorfos en $\mathbf{FinSet}$)

Definiremos en $\mathscr{N}$ la suma como la clase de la unión disjunta (i.e. el coproducto en $\mathbf{FinSet}$),

# Definición de $\mathscr{N}$

Vamos a definir $\mathscr{N}$ como el conjunto de las clases de equivalencia, donde dos conjuntos en $\mathbf{FinSet}$ son equivalentes si existe una biyección entre ellos (son isomorfos en $\mathbf{FinSet}$)

Definiremos en $\mathscr{N}$ la suma como la clase de la unión disjunta (i.e. el coproducto en $\mathbf{FinSet}$),

y el producto como la clase del producto cartesiano (i.e. el producto en $\mathbf{FinSet}$)

# Algunas observaciones

Hemos definido la suma y el producto en $\mathscr{N}$ con construcciones de **FinSet**, sin embargo es fácil probar que si $A \simeq A'$ y $B \simeq B'$ entonces $A \sqcup B \simeq A' \sqcup B'$ y $A \times B \simeq A' \times B'$

# Algunas observaciones

Hemos definido la suma y el producto en $\mathscr{N}$ con construcciones de **FinSet**, sin embargo es fácil probar que si $A \simeq A'$ y $B \simeq B'$ entonces $A \sqcup B \simeq A' \sqcup B'$ y $A \times B \simeq A' \times B'$

El coproducto no es un conjunto, sin embargo la propiedad universal de su definición nos permite saber que son biyectivos (y de igual manera para el producto)

# Propiedades de las operaciones

En cualquier categoría vale que, de existir el producto (o el coproducto), entonces el mismo es asociativo y conmutativo

# Propiedades de las operaciones

En cualquier categoría vale que, de existir el producto (o el coproducto), entonces el mismo es asociativo y conmutativo

No en toda categoría (con productos y coproductos) vale la distributividad.

Sin embargo, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema**

Toda categoría cartesianamente cerrada con coproductos finitos, es distributiva.

donde cartesianamente cerrada significa que tiene productos y exponenciación

# Propiedades de las operaciones

En cualquier categoría vale que, de existir el producto (o el coproducto), entonces el mismo es asociativo y conmutativo

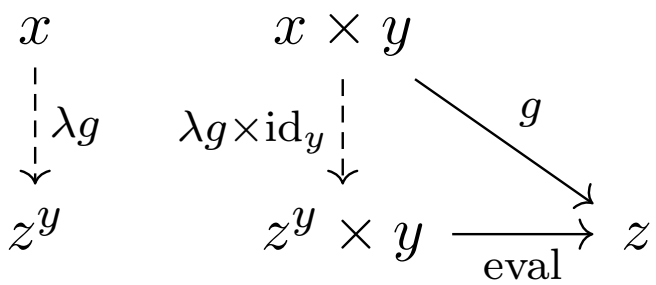
No en toda categoría (con productos y coproductos) vale la distributividad.

Sin embargo, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema**

Toda categoría cartesianamente cerrada con coproductos finitos, es distributiva.

donde cartesianamente cerrada significa que tiene productos y exponenciación




$$\mathsf{Hom}(x \times y, z) \simeq \mathsf{Hom}(x, z^y)$$

Figura: Exponenciación de objetos

# Bosquejo de la demostración de la asociatividad

## Resultado previo

Las proyecciones del producto son flechas mónicas.

$$p_i \circ f_1 = p_i \circ f_2 \quad \Longrightarrow \quad f_1 = f_2.$$

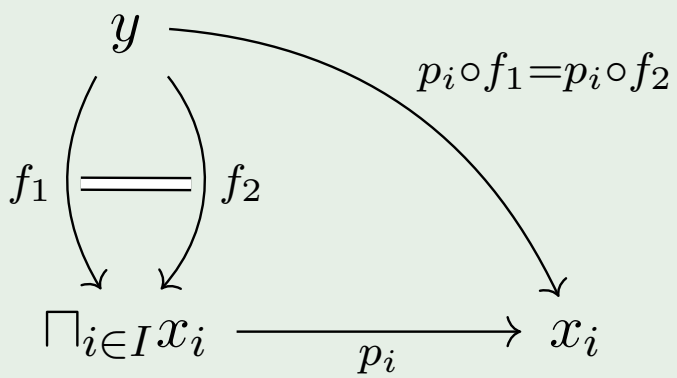
# Bosquejo de la demostración de la asociatividad

## Resultado previo

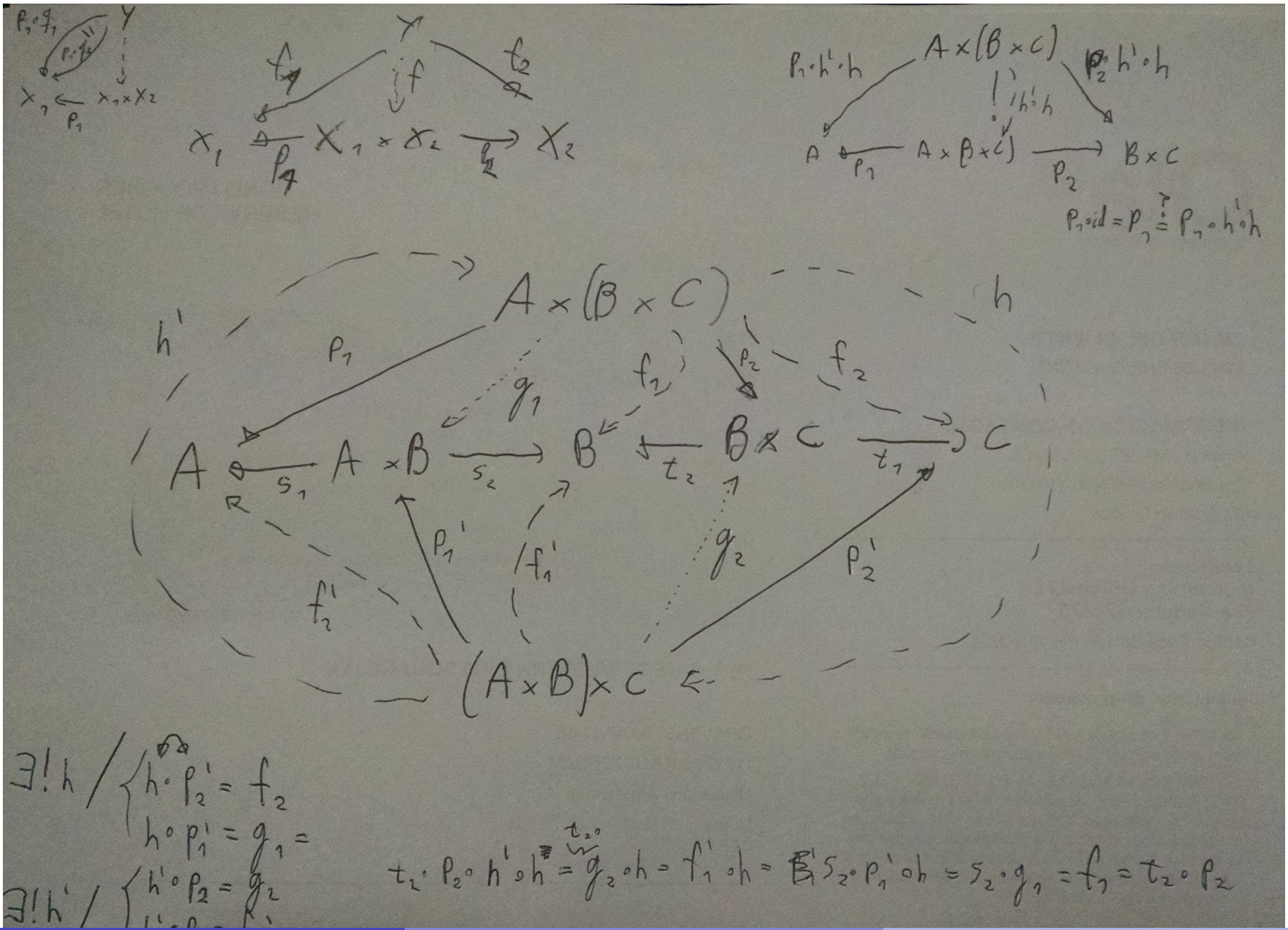
Las proyecciones del producto son flechas mónicas.

$$p_i \circ f_1 = p_i \circ f_2 \quad \Longrightarrow \quad f_1 = f_2.$$

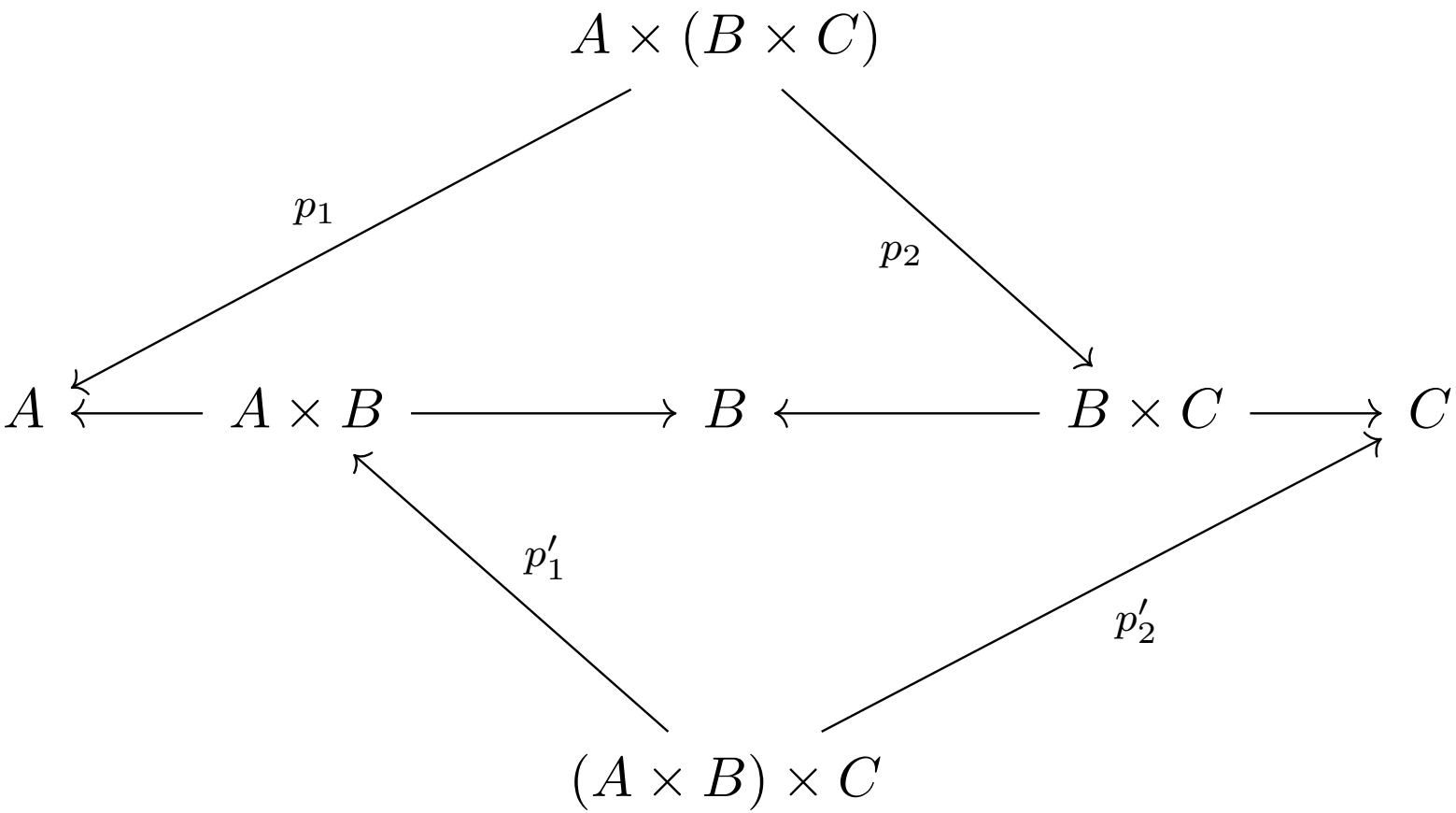
## Demostración



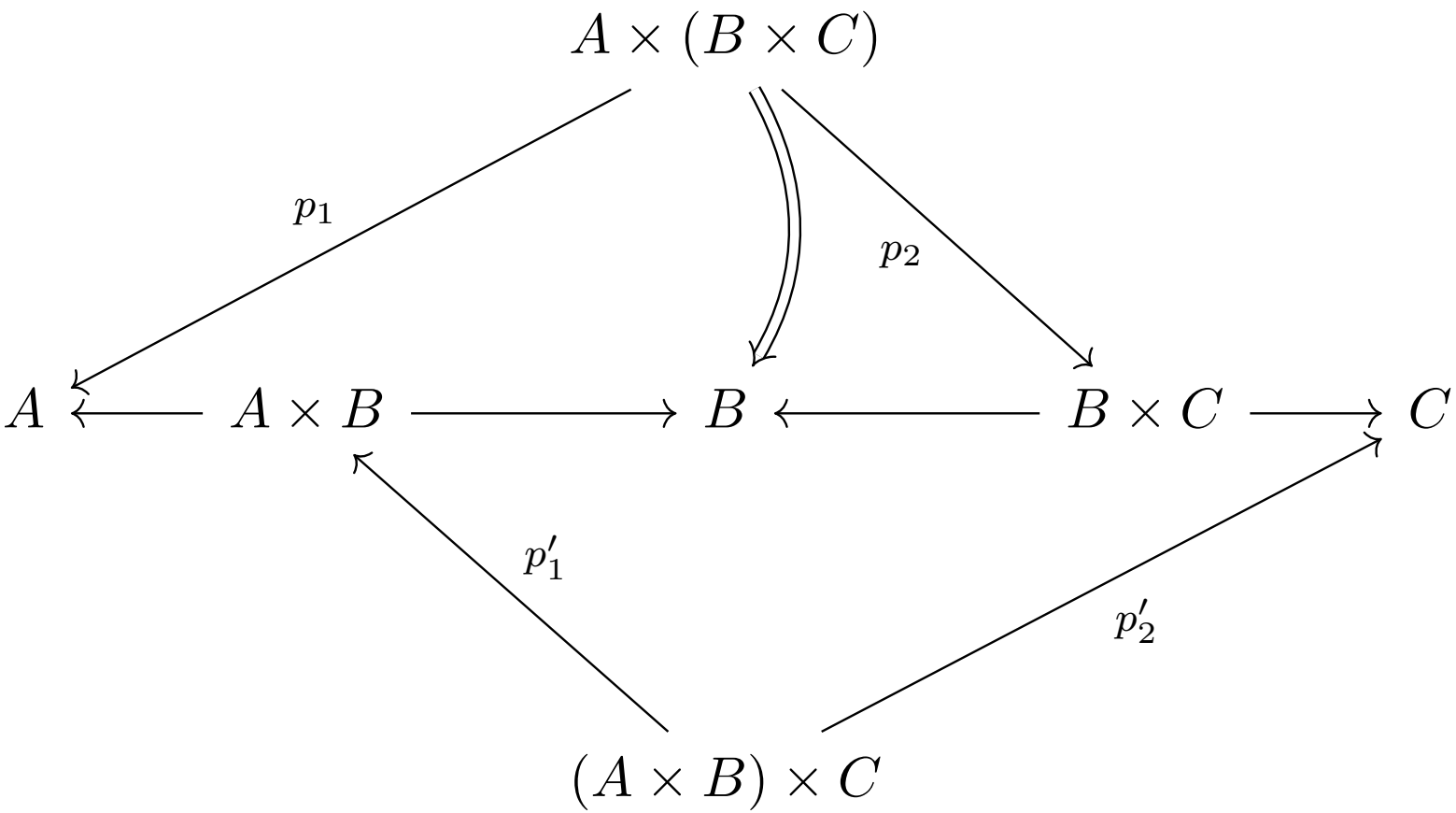
# Bosquejo de la demostración de la asociatividad



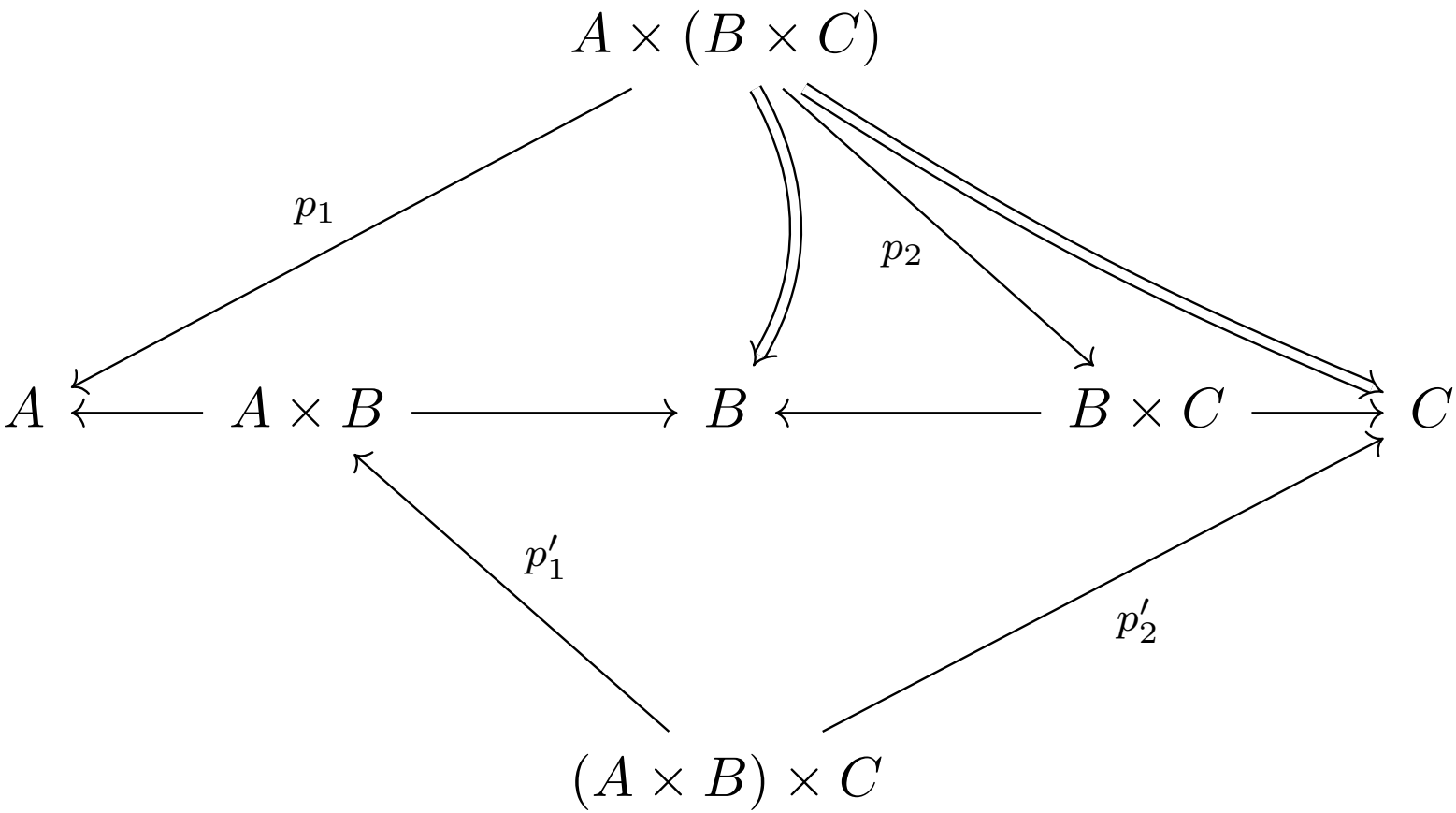
# Bosquejo de la demostración de la asociatividad



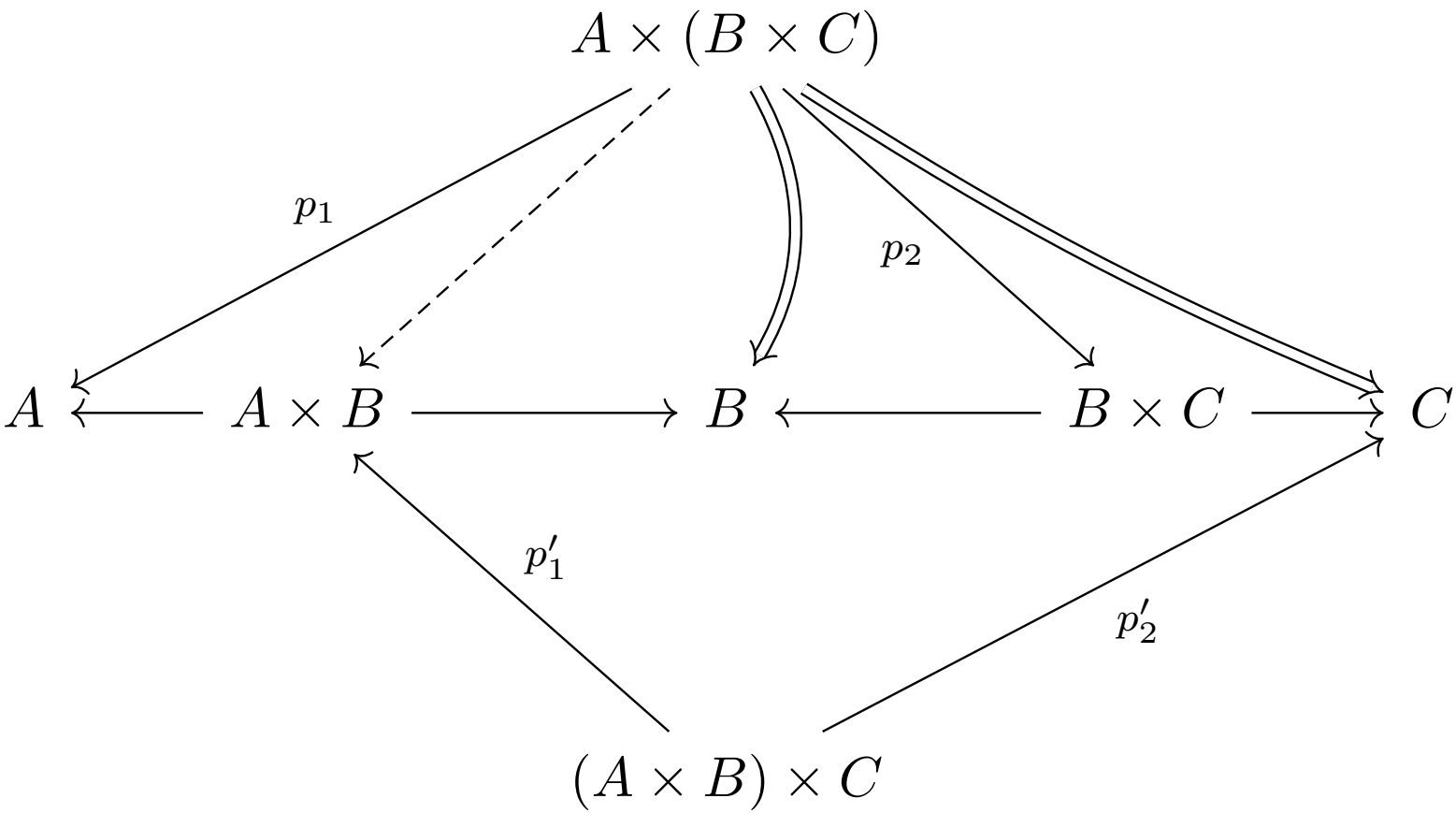
# Bosquejo de la demostración de la asociatividad



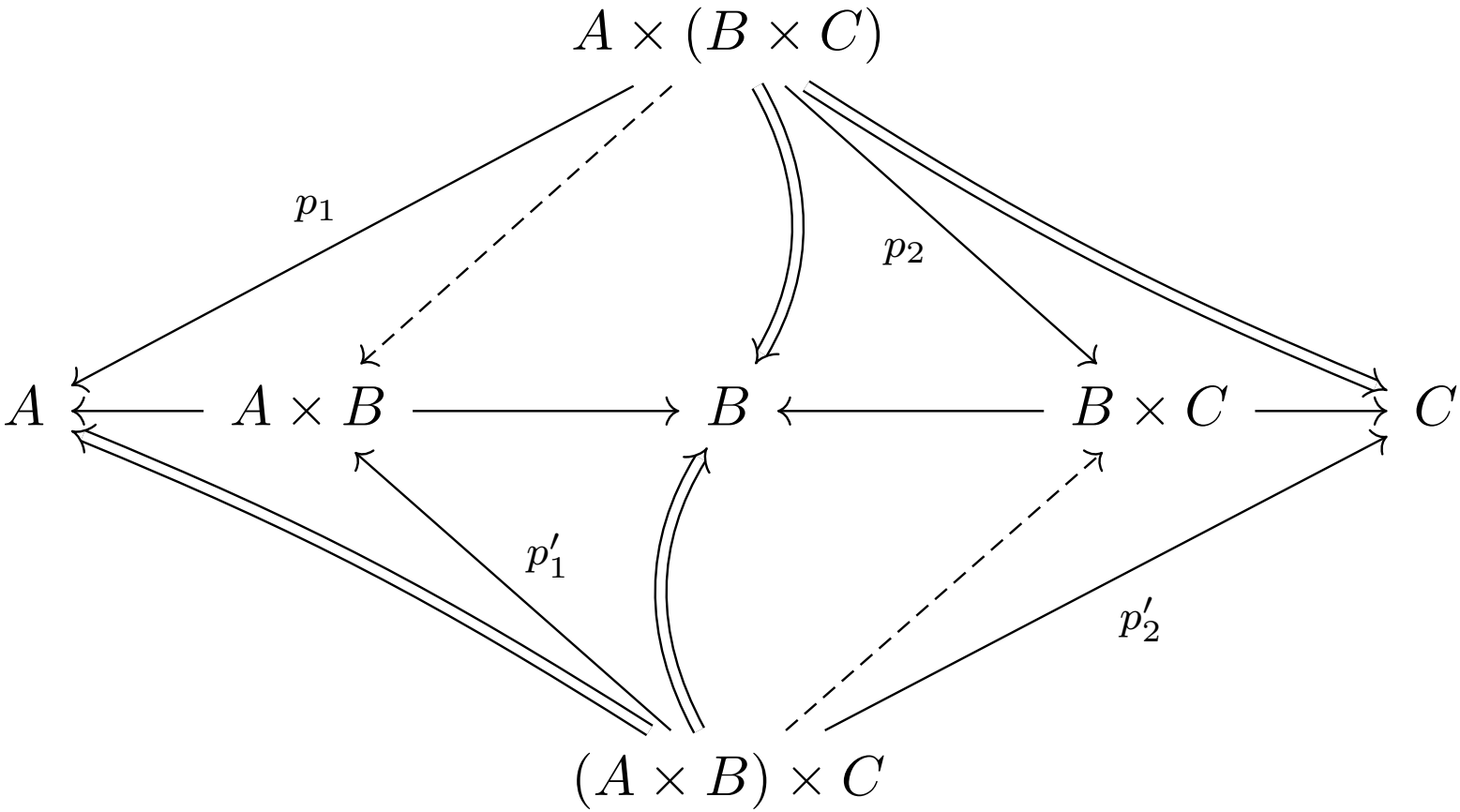
# Bosquejo de la demostración de la asociatividad



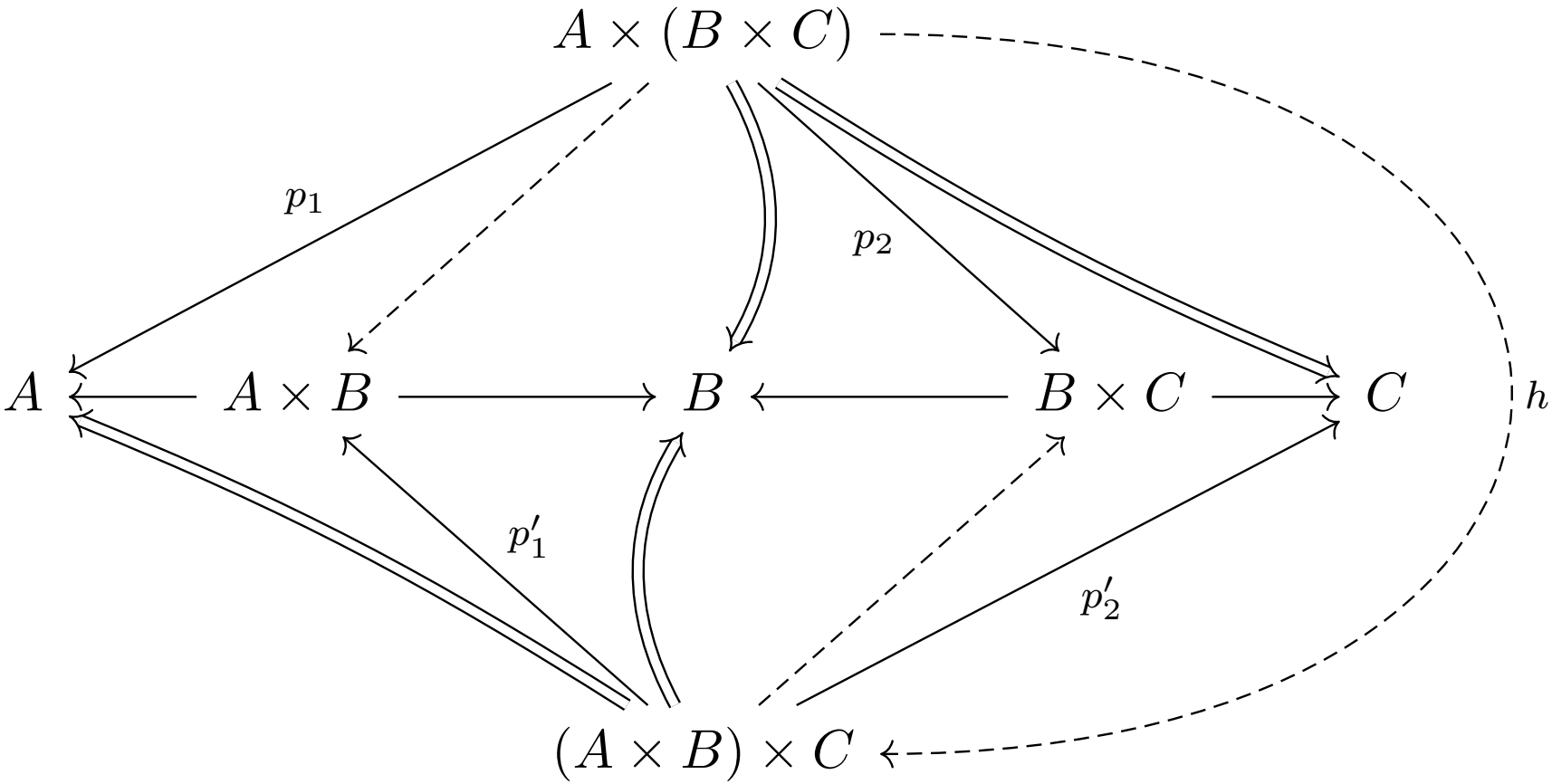
# Bosquejo de la demostración de la asociatividad



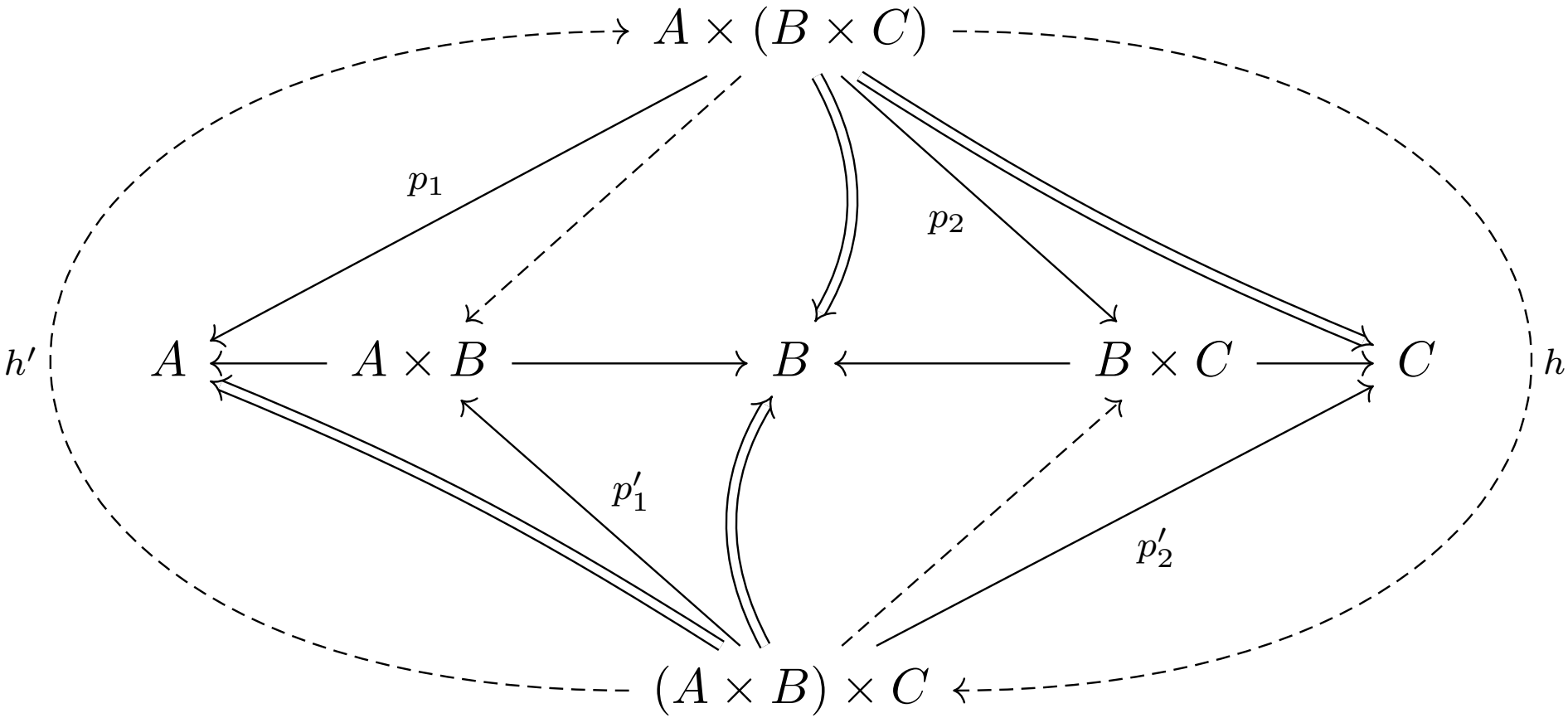
# Bosquejo de la demostración de la asociatividad



# Bosquejo de la demostración de la asociatividad



# Bosquejo de la demostración de la asociatividad



# Neutros

Definimos como 0 a la clase de equivalencia del conjunto vacío, y 1 a la de los conjuntos con un elemento (para evitar ambigüedades, digamos la clase de equivalencia de $\{\{\emptyset\}\}$)

# Neutros

Definimos como 0 a la clase de equivalencia del conjunto vacío, y 1 a la de los conjuntos con un elemento (para evitar ambigüedades, digamos la clase de equivalencia de $\{\{\emptyset\}\}$)

$\emptyset$ es inicial en $\mathbf{FinSet}$ y cualquier conjunto de 1 es terminal

# Neutros

Definimos como 0 a la clase de equivalencia del conjunto vacío, y 1 a la de los conjuntos con un elemento (para evitar ambigüedades, digamos la clase de equivalencia de $\{\{\emptyset\}\}$)

$\emptyset$ es inicial en $\mathbf{FinSet}$ y cualquier conjunto de 1 es terminal

Tenemos que $X + 0 \simeq X$ y $X \times 1 \simeq X$

# Neutros

Definimos como 0 a la clase de equivalencia del conjunto vacío, y 1 a la de los conjuntos con un elemento (para evitar ambigüedades, digamos la clase de equivalencia de $\{\{\emptyset\}\}$)

$\emptyset$ es inicial en $\mathbf{FinSet}$ y cualquier conjunto de 1 es terminal

Tenemos que $X + 0 \simeq X$ y $X \times 1 \simeq X$

**$\mathbf{FinSet}$** es una *symmetric rig category*

# Otras formas de obtener $\mathbb{N}$

Podemos obtener la estructura de $\mathbb{N}$ decategorificando las siguientes categorías

- la categoría de los espacios vectoriales, tomando la suma como la suma directa y la multiplicación como el producto tensorial

# Otras formas de obtener $\mathbb{N}$

Podemos obtener la estructura de $\mathbb{N}$ decategorificando las siguientes categorías

- la categoría de los espacios vectoriales, tomando la suma como la suma directa y la multiplicación como el producto tensorial
- $\mathbf{FinSet_0}$ la subcategoría de $\mathbf{FinSet}$ que tiene por flechas solo las biyecciones

# Problemas al intentar extender el resultado

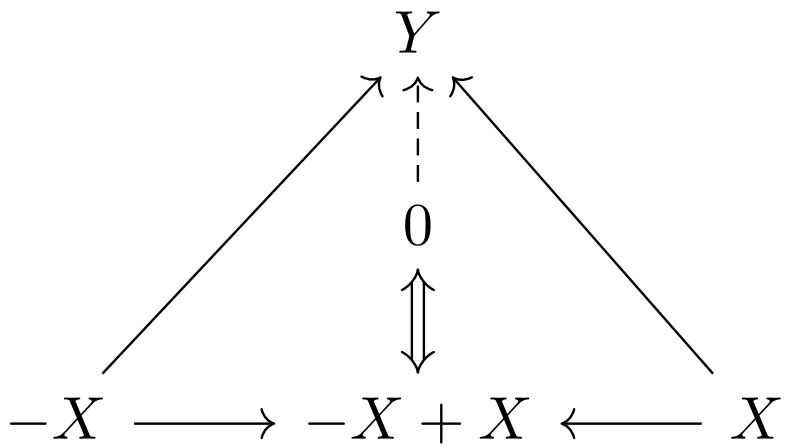
Supongamos que para cada objeto $X$ de una categoría, existe otro $-X$ tal que $-X + X \simeq 0$

# Problemas al intentar extender el resultado

Supongamos que para cada objeto $X$ de una categoría, existe otro $-X$ tal que $-X + X \simeq 0$
Luego, para cualquier otro objeto $Y$ tendríamos una única flecha de $-X + X$ a $Y$, pero esto significaría que tanto $X$ como $-X$ son iniciales

# Problemas al intentar extender el resultado

Supongamos que para cada objeto $X$ de una categoría, existe otro $-X$ tal que $-X + X \simeq 0$
Luego, para cualquier otro objeto $Y$ tendríamos una única flecha de $-X + X$ a $Y$, pero esto significaría que tanto $X$ como $-X$ son iniciales



1. Categorías
   - Definición
   - Construcciones
   - Funtores y transformaciones naturales
   - Equivalencias (y dualidades)
2. Decategorificación y los números naturales
   - Intuición
   - Decategorificación de $\mathbf{FinSet}$
3. Bibliografía

# Bibliografía

Baez, J. C., and Dolan, J.
From finite sets to feynman diagrams.
*arXiv preprint math/0004133* (2000).

Benini, M.
Cartesian closed categories are distributive.
*arXiv preprint arXiv:1406.0961* (2014).

Lawvere, F. W., and Schanuel, S. H.
*Conceptual mathematics: a first introduction to categories*.
Cambridge University Press, 2009.

Mac Lane, S.
*Categories for the working mathematician*.
Springer Science & Business Media, 1978.

Morandi, P.
Dualities in lattice theory.
*Mathematical Notes http://sierra. nmsu. edu/morandi* (2005).

¡¡¡GRACIAS!!!